

Αλγεβρικές Δομές II, Σύνολο ασκήσεων 1

Εβδομάδα 10.03.14-16.03.14

1. Έστω S μη κενό σύνολο και ορίζουμε στο δυναμοσύνολο $R = P(S)$ του S τις πράξεις $+$ και \cdot ως εξής:

$$A + B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B \text{ αλλά } x \notin (A \cap B)\} = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$A \cdot B = A \cap B$$

για κάθε $A, B \in R$.

- (1) Να γράψετε τα 4 στοιχεία του R όταν $S = \{a, b\}$ και να δώσετε τους πίνακες για τις πράξεις $+$ και \cdot του R .
- (2) Να αποδείξετε ότι R είναι δακτύλιος. Έχει μοναδιαίο στοιχείο; Είναι αντιμεταθετικός;
- (3) Να αποδείξετε ότι για κάθε στοιχείο $A \in R$ ισχύει ότι $A^2 = A$.

2. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πινάκων είναι σώμα. Στη συνέχεια να δείξετε ότι F είναι ισόμορφο με το σώμα \mathbb{C} .

- 3.

- (1) Να δείξετε ότι $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ είναι υπόσωμα του \mathbb{R} .
- (2) Να δείξετε γενικότερα ότι αν n είναι πρώτος, τότε $\mathbb{Q}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ είναι υπόσωμα του \mathbb{R} .
- (3) Είναι το σύνολο $\mathbb{Q}[\sqrt{27}]$ υπόσωμα του \mathbb{R} ;
- (4) Είναι τα σώματα $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ και $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ισόμορφα;

- 4.

- (1) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει σώμα με 6 στοιχεία.
- (2) Να βρείτε πίνακες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού για ένα σώμα με 8 στοιχεία (αν υπάρχουν).