Τορικές επιφάνειες log Del Pezzo

Εκκινούμε από το απλούστερο παράδειγμα: **τον 2-διάστατο προβολικό χώρο** $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

- **1ος Ορισμός**: Μέσω των ευθειών που διέρχονται από την αρχή των αξόνων:

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} := (\mathbb{C}^3 \diagdown \{(0,0,0)\}) \, / \backsim,$$

όπου

$$(z_0, z_1, z_2) \backsim (z_0', z_1', z_2') \underset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} (\exists\, t \in \mathbb{C} \diagdown \{0\} : z_i = t z_i', \ \forall i \in \{0,1,2\})$$

και εισάγουμε τις ομογενείς συντεταγμένες

$$[z_0 : z_1 : z_2] := \{(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^3 \diagdown \{(0,0,0)\} \,|\, (\xi_0, \xi_1, \xi_2) \backsim (z_0, z_1, z_2)\}$$

Θέτοντας

$$U_i := \left\{ [z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \,\middle|\, z_i \neq 0 \right\}, i = 0, 1, 2$$

λαμβάνουμε $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} = U_0 \cup U_1 \cup U_2$ με $\mathbb{C}^2 \ni (y_1, y_2) \overset{\approx}{\longmapsto} \begin{cases} [1 : y_1 : y_2] \in U_0, \\ [y_1 : 1 : y_2] \in U_1, \\ [y_1 : y_2 : 1] \in U_2, \end{cases}$

ήτοι ένα 2-διάστατο μιγαδικό πολύπτυγμα (= **λεία μιγαδική επιφάνεια**).

- **2ος Ορισμός**: Ως τροχιακός χώρος.

Θεωρώντας τις συνήθεις ταυτίσεις

$$\mathbb{S}^1 = \left\{t \in \mathbb{C} : |t|^2 = 1\right\}, \mathbb{S}^5 = \left\{ (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, |z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\right\}$$

ορίζεται η δράση τού κύκλου επί τής πενταδιάστατης σφαίρας:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^5 \ni (t, (z_0, z_1, z_2)) \longmapsto t \cdot (z_0, z_1, z_2) := (tz_0, tz_1, tz_2) \in \mathbb{S}^5,$$

και η ταυτισμική απεικόνιση

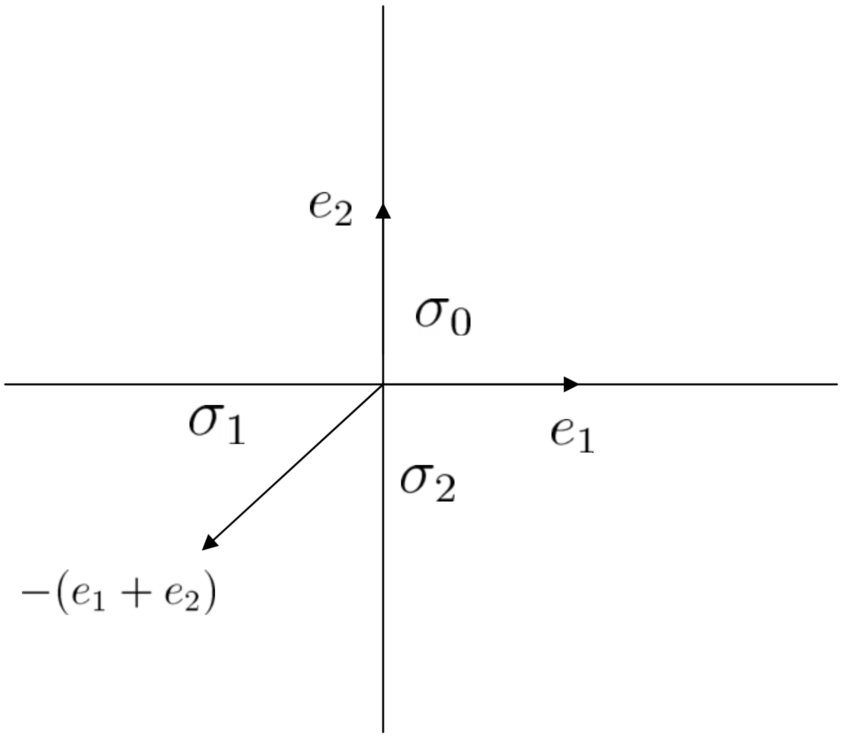
$$p : \mathbb{S}^5 \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \quad p(z_0, z_1, z_2) := [z_0 : z_1 : z_2],$$

μέσω τής οποίας επάγεται ο ομοιομορφισμός:

$$\overline{p} : \mathbb{S}^5/\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\approx} \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \quad \overline{p}((z_0, z_1, z_2)\mathbf{mod}\ \mathbb{S}^1) := [z_0 : z_1 : z_2].$$

Ως εκ τούτου, ο 2-διάστατος μιγαδικός προβολικός χώρος
είναι *συνεκτικό*, *συμπαγές* πολύπτυγμα.

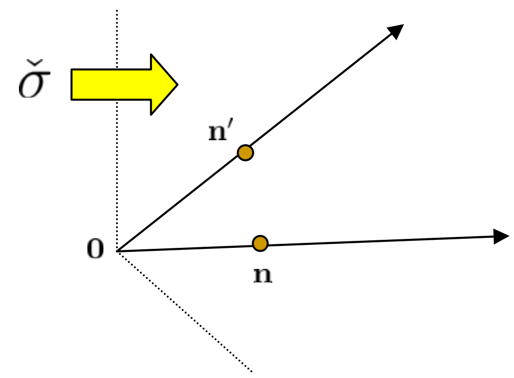
- **3ος Ορισμός**: Ως (λεία) τορική ποικιλότητα.



$$U_{\sigma_i} = U_i = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\check{\sigma}_i \cap \mathbb{Z}^2])\,,\ i = 0, 1, 2.$$

Συσχετικές τορικές ποικιλότητες διαστάσεως 2

- **Αφετηρία**: Ένας 2-διάστατος αυστηρώς κυρτός, πολυεδρικός, ρητός κώνος σ



- $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}' = \{a\mathbf{n} + b\mathbf{n}' \mid a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$
- Τα $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα.
- $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^2$,
- $\sigma \cap (-\sigma) = \{\mathbf{0}\}$.
- Δυϊκός κώνος του: $\check{\sigma} := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geq 0,\ \forall \mathbf{y} \in \sigma\}$.
- $\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2$: μια (προσθετική) μεταθετική ημιομάδα με $\mathbf{0}$ (μονοειδές).

- Για οιαδήποτε μεταθετική ημιομάδα S με $\mathbf{0}$ ορίζουμε τη μεταθετική $\mathbb{C}$-άλγεβρα $\mathbb{C}[S] := \bigoplus_{\mathbf{m}\in S} \mathbb{C}\mathbf{e}(\mathbf{m})$, όπου η βάση της $\{\mathbf{e}(\mathbf{m}) \mid \mathbf{m}\in S\}$

αποτελείται από φορμαλιστικά σύμβολα υπακούοντα στον «εκθετικό νόμο»

$$\mathbf{e}(\mathbf{m}+\mathbf{m}') = \mathbf{e}(\mathbf{m})\mathbf{e}(\mathbf{m}'),\ \forall \mathbf{m},\mathbf{m}'\in S,$$

και

$$\mathbf{e}(\mathbf{0}_S) =: \mathbf{1}_{\mathbb{C}[S]}.$$

Π.χ.

$$\mathbb{C}[(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\nu}] \cong \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_{\nu}],\ \ \mathbb{C}[\mathbb{Z}^{\nu}] \cong \mathbb{C}[z_1^{\pm 1},\ldots,z_{\nu}^{\pm 1}],$$

ενώ η $S = \check{\sigma}\cap\mathbb{Z}^2$ είναι μια πεπερασμένως παραγόμενη ημιομάδα με

$$\check{\sigma}\cap\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}_{\geq 0}\mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbb{Z}_{\geq 0}\mathbf{m}_k \Longrightarrow \mathbb{C}[\check{\sigma}\cap\mathbb{Z}^2] := \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbb{C}\mathbf{e}(m_j)$$

οπότε

$$\mathbb{C}[\check{\sigma}\cap\mathbb{Z}^2] \cong \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_k]/\mathcal{I},\ \ \mathcal{I} := \operatorname{Ker}(\varphi),$$

όπου $\varphi : \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_k] \longrightarrow \mathbb{C}[\check{\sigma}\cap\mathbb{Z}^2]$, $z_j \longmapsto \mathbf{e}(m_j)$, ο φυσικός επιμορφισμός.

Παράδειγμα:

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}(e_1 + 2e_2) \Longrightarrow \check{\sigma} = \mathbb{R}_{\geq 0}(2e_1 - e_2) + \mathbb{R}_{\geq 0}e_2$$

$$\Longrightarrow \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}_{\geq 0}e_1 + \mathbb{Z}_{\geq 0}e_2 + \mathbb{Z}_{\geq 0}(2e_1 - e_2) \Longrightarrow U_\sigma \cong \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 |\, z_1^2 = z_2 z_3\}.$$

Εν προκειμένω,

$$\{\text{points of } U_\sigma\} \longleftrightarrow \text{Max-Spec}(\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2]) \longleftrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg.}}(\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2], \mathbb{C}) \longleftrightarrow \text{Hom}_{\text{semigr.}}(\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2, \mathbb{C}),$$

όπου

$$\text{Hom}_{\text{semigr.}}(\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2, \mathbb{C}) \ni u \longmapsto \theta_u \in \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg.}}(\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2], \mathbb{C}),\ \ \theta_u(\mathbf{e}(\mathbf{m})) := u(\mathbf{m}),\ \ \forall \mathbf{m} \in \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2.$$

Θέτοντας

$$\mathbb{T} := (\mathbb{C}^*)^2 = \text{Max-Spec}(\mathbb{C}[\mathbb{Z}^2]) = \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg.}}(\mathbb{C}[\mathbb{Z}^2], \mathbb{C}) = \text{Hom}_{\text{semigr.}}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{C})$$
$$= \text{Hom}_{\text{gr.}}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{C}^*) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{C}^*) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = \mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*,$$

μπορεί κανείς να εκλαμβάνει το $\mathbf{e}(\mathbf{m})$ ως *χαρακτήρα* τού αλγεβρικού τόρου $\mathbb{T}$:

$$\mathbb{Z}^2 \ni \mathbf{m} \rightsquigarrow (\mathbf{e}(\mathbf{m}) : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}^*),\ \mathbf{e}(\mathbf{m})(t) := t(\mathbf{m}),\ \forall t \in \mathbb{T}.$$

Επιπροσθέτως, ορίζεται κατά τρόπο φυσικό μια δράση τού $\mathbb{T}$ επί τού U_σ :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_{\text{semigr.}}(\mathbb{Z}^2, \mathbb{C}) \times \text{Hom}_{\text{semigr.}}(\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\text{semigr.}}(\check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2, \mathbb{C}) & & \\ \| & & \| & \quad (t, u) & \longmapsto \ t \cdot u \\ \mathbb{T} \times U_\sigma & \longrightarrow & U_\sigma & & \end{array}$$

Ριπίδια (Fans)

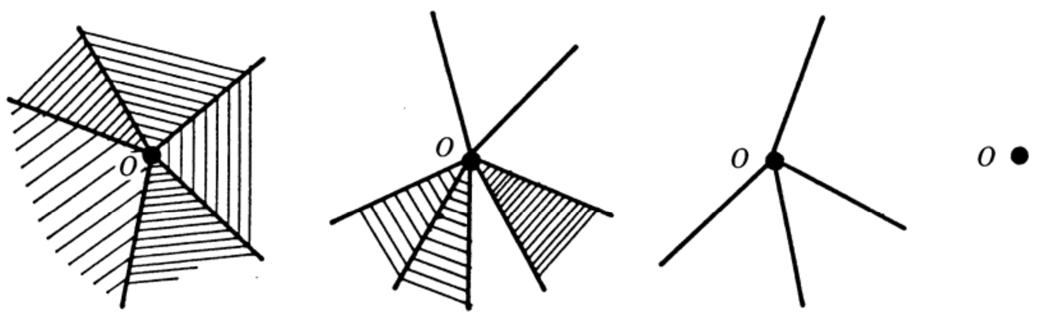
- **Ορισμός**: Ένα υποσύνολο Δ τού $\mathbb{R}^2$ αποτελούμενο από πεπερασμένου πλήθους αυστηρώς κυρτούς, πολυεδρικούς, ρητούς κώνους διαστάσεως ≤ 2 καλείται **ριπίδιο** όταν πληροί τις ακόλουθες συνθήκες:

(i) $\sigma \in \Delta,\ \tau \preceq \sigma \Longrightarrow \tau \in \Delta,$

(ii) $\sigma, \sigma' \in \Delta \Longrightarrow \sigma \cap \sigma' \preceq \sigma,\ \ \sigma \cap \sigma' \preceq \sigma'.$

$$\left(\tau \preceq \sigma \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \exists \mathbf{m} \in \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2 : \tau = \{\mathbf{y} \in \sigma |\ \langle \mathbf{m}, \mathbf{y} \rangle = 0\}.\right)$$

Ως **φορέας** του ορίζεται το σύνολο: $\quad |\Delta| := \bigcup \{\sigma |\ \sigma \in \Delta\}.$



- **Θεώρημα:** Μέσω ενός (τέτοιου) ριπιδίου Δ κατασκευάζεται μια (συνεκτική) **τορική ποικιλότητα**

$$X_\Delta := \left(\left(\coprod_{\sigma \in \Delta} U_\sigma \right) / \sim \right)$$

ως ταυτισμικός χώρος με

$$U_{\sigma_1} \ni u_1 \sim u_2 \in U_{\sigma_2} \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \exists \tau \in \Delta, \tau \preceq \sigma_1 \cap \sigma_2 : u_1|_{U_\tau} = u_2|_{U_\tau} .$$

- **Θεώρημα:** Η X_Δ είναι συμπαγής $\Longleftrightarrow |\Delta| = \mathbb{R}^2.$

  (Σε αυτήν την περίπτωση το ριπίδιο καλείται **πλήρες ριπίδιο**.)
- **Σημείωση**: Η προαναφερθείσα δράση τού αλγεβρικού τόρου $\mathbb{T}$ επεκτείνεται κατά τρόπο φυσικό επί ολοκλήρου τής X_Δ :

$$\mathbb{T} \times X_\Delta \longrightarrow X_\Delta$$

Το σύνολο των κώνων τού θεωρούμενου ριπιδίου παραμετροποιούν τις τροχιές ως προς την εν λόγω δράση, υπό την έννοια ότι *κάθε τροχιά είναι τής μορφής*

$$\mathrm{orb}_\Delta(\sigma) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap \mathbb{Z}^2, \mathbb{C}^*) \subset U_\sigma, \ \sigma \in \Delta \quad [\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{orb}_\Delta(\sigma)) = 2 - \dim(\sigma)].$$

Ελαχιστοτική διάλυση 2-διάστατων τορικών ιδιωμάτων

Έστω, όπως πριν, $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}'$, με τα $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^2$ πρωταρχικά κιγκλιδωματικά σημεία και έστω $q := |\det(\mathbf{n}, \mathbf{n}')| \geq 1.$ Τότε

$$\exists p \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \mu\kappa\delta(p,q) = 1,\ 0 \leq p < q : U_\sigma \cong U_{\mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}(pe_1 + qe_2)}.$$

Σημειωτέον ότι το p είναι μονοσημάντως ορισμένο με αυτήν την ιδιότητα, με μόνη εξαίρεση την αντικατάστασή του με το $\widehat{p}$, όπου

$$\widehat{p} \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \mu\kappa\delta(\widehat{p},q) = 1,\ 0 \leq \widehat{p} < q : p\widehat{p} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q).$$

(Τούτο συνεπάγεται απλώς την εναλλαγή τού ρόλου των $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$.)

Ως εκ τούτου, μπορούμε να «βαπτίσουμε» (από τούδε και στο εξής) *κάθε* 2-διάστατο αυστηρώς κυρτό, πολυεδρικό, ρητό κώνο ως (p,q)-***κώνο***.
Εν συνεχεία, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- **1η περίπτωση**: Όταν $(p = 0 \Leftrightarrow)\ q = 1 \Longrightarrow U_\sigma \cong \mathbb{C}^2$.
- **2η περίπτωση**: Όταν $q > 1 \Longrightarrow U_\sigma \cong \mathbb{C}^2/G$, όπου η $G = \left\langle \mathrm{diag}(\zeta_q, \zeta_q^{-p}) \right\rangle$

δρα γραμμικώς επί τού $\mathbb{C}^2$. Σε αυτήν την περίπτωση θεωρούμε την ανάπτυξη σε πεπερασμένο συνεχές κλάσμα (με το «μείον» ως πρόσημό του) τού ρητού αριθμού:

$$\frac{q}{q-p} = [\![b_1, b_2, \ldots, b_s]\!] := b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{\ddots \; b_{s-1} - \cfrac{1}{b_s}}} \quad ,$$

και ορίζουμε τα κιγκλιδωματικά σημεία

$$\mathbf{u}_0 := \mathbf{n},\ \mathbf{u}_1 := \tfrac{1}{q}((q-p)\mathbf{n} + \mathbf{n}') \qquad \textit{και} \qquad \mathbf{u}_{j+1} := b_j \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{j-1}, \ \ \forall j \in \{1, \ldots, s\}.$$

Όπως αποδεικνύεται εύκολα,

$$\mathbf{u}_{s+1} = \mathbf{n}',\ b_j \geq 2,\ \forall j \in \{1, \ldots, s\}.$$

- Η ελαχιστοτική διάλυση $X_{\widetilde{\Delta}_\sigma} \xrightarrow{f} X_{\Delta_\sigma} = U_\sigma$ τού ιδιώματος $\mathrm{orb}(\sigma) = [\mathbf{0}] \in \mathbb{C}^2/G \cong U_\sigma$ κατασκευάζεται μέσω τής εκλεπτύνσεως

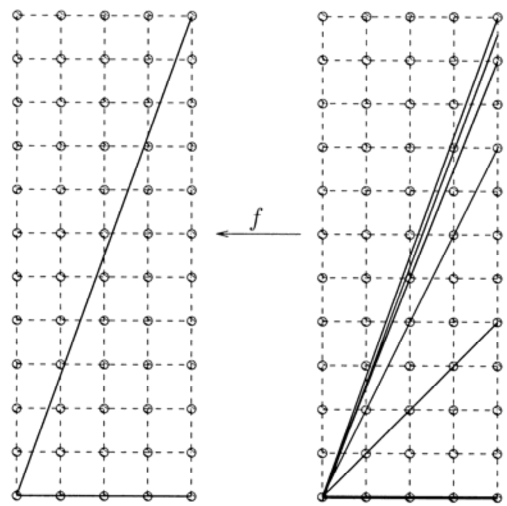
$$\widetilde{\Delta}_\sigma := \{\{\mathbb{R}_{\geq 0}\,\mathbf{u}_j + \mathbb{R}_{\geq 0}\,\mathbf{u}_{j+1} \mid 0 \leq j \leq s\} \ \textbf{ΚΑΙ ΟΙ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΟΥΣ}\}$$

τού ριπιδίου $\Delta_\sigma := \{\sigma\ \textbf{ΚΑΙ ΟΙ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΟΥ}\}$,

όπου

$$E_j := \overline{\mathrm{orb}_{\widetilde{\Delta}_\sigma}(\mathbb{R}_{\geq 0}\,\mathbf{u}_j)}\ (\cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}),\quad (E_j)^2 = -b_j,\ \forall j \in \{1,\ldots,s\}.$$

(F. Hirzebruch, 1953, T. Oda, 1988). Παράδειγμα για $p = 4$, $q = 11$.



Δ_σ $\qquad$ $\widetilde{\Delta}_\sigma$

Υπομνήσεις από τη θεωρία τομών διαιρετών επί συμπαγών μιγαδικών επιφανειών

- Για **λείες** συμπαγείς μιγαδικές επιφάνειες X: Έστω $\mathcal{O}_X$ το δράγμα δομής επί τού X και (για $D \in \mathrm{Div}(X)$) έστω $\mathcal{O}_X(D)$ το δράγμα το οριζόμενο για κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο U τού X ως εξής:

$$U \longmapsto \mathcal{O}_X(D)(U) := \{\phi \in \mathbb{C}(X)^* | \ (\mathrm{div}(\phi) + D)|_U \geq 0\}.$$

Εάν $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$, τότε

$$\boxed{D \cdot D' := \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-D)) - \chi(\mathcal{O}_X(-D')) + \chi(\mathcal{O}_X(-D - D')),}$$

όπου $\chi(\mathcal{F}) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathcal{F})$ η χαρακτηριστική Euler-Poincaré οιουδήποτε συμφυούς αναλυτικού δράγματος (coherent analytic sheaf) $\mathcal{F}$ ορισμένου επί τού X.

- Για **ορθόθετες (normal)** συμπαγείς μιγαδικές επιφάνειες Y (D. Mumford, 1961): Έστω $f : Z \longrightarrow Y$ μια αποϊδιωματοποίηση τού Y με το $\mathrm{Exc}(f) = \bigcup_{j=1}^{s} E_j$ ως εξαιρέσιμο τόπο. Η *αντίστροφη εικόνα* $f^* D$ ενός $D \in \mathrm{Div}_W(Y)$ ορίζεται μέσω τού τύπου

$$f^*D = \overline{D} + \textstyle\sum_{j=1}^{s} a_j E_j \in \mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(Z) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q},$$

όπου $\overline{D}$ η *ακριβής μεταφέρουσα* (strict transform) τού D μέσω τής f και οι $a_1, \ldots, a_s$ ρητοί αριθμοί, οι οποίοι προσδιορίζονται μονοσημάντως μέσω των εξισώσεων:

$$\overline{D} \cdot E_{j'} + \left(\sum_{j=1}^{s} a_j E_j \right) \cdot E_{j'} = 0, \quad \forall j' \in \{1, \ldots, s\}.$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει ένας ομομορφισμός ομάδων

$$f^* : \mathrm{Div}_{\mathrm{W}}(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(Z) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

με τη βοήθεια τού οποίου ορίζονται *κλασματικοί αριθμοί τομών*

$$\boxed{(\mathrm{Div}_{\mathrm{W}}(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \times (\mathrm{Div}_{\mathrm{W}}(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \ni (D, D') \longmapsto D \cdot D' := f^*D \cdot f^*D' \in \mathbb{Q}.}$$

Κανονιστικός διαιρέτης

- Για **λείες** συμπαγείς μιγαδικές επιφάνειες X :

$K_X \in \mathrm{Div}(X)$ με $\mathcal{O}_X(K_X) \cong \bigwedge^2 T_X^{\mathrm{hol}}.$

- **Τύπος τοῦ Max Noether (που ἔπεται ἀμεσα ἀπό το Θ. HRR)**:

$$\boxed{\chi(\mathcal{O}_X) = \tfrac{1}{12}(K_X^2 + e(X)),}$$

ὁπου $e(X) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_{\mathbb{R}} H^i(X, \mathbb{R})$ η τοπολογική χαρακτηριστική Euler τοῦ X.

- Για **ορθόθετες (normal)** συμπαγείς μιγαδικές επιφάνειες Y :

$K_Y \in \mathrm{Div}_W(Y)$ με $\mathcal{O}_Y(K_Y) \cong \iota_* \left(\bigwedge^2 \Omega_{\mathrm{Reg}(Y)/\mathbb{C}} \right)$, ὁπου

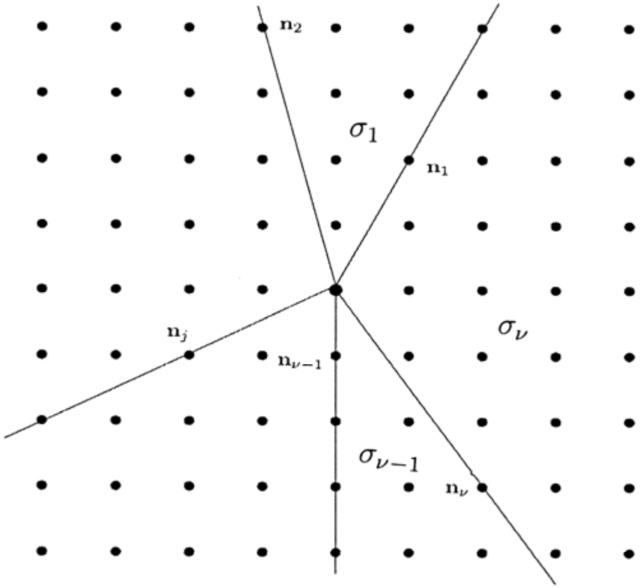
$$\mathrm{Reg}(Y) := Y \smallsetminus \mathrm{Sing}(Y) \overset{\iota}{\hookrightarrow} Y.$$

Συμπαγείς τορικές επιφάνειες

- Έστω Δ ένα πλήρες ριπίδιο εντός τού $\mathbb{R}^2$. Ας υποθέσουμε ότι οι

$$\sigma_i = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}_i + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}_{i+1}, \quad i \in \{1, \ldots, \nu\},$$

είναι οι 2-διάστατοι κώνοι του με $\nu \geq 3$ και τα $\mathbf{n}_i$ πρωταρχικά κιγκλιδωματικά σημεία για κάθε $i \in \{1, \ldots, \nu\}$ διατεταγμένα αντιωρολογιακώς με $\mathbf{n}_{\nu+1} := \mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_0 := \mathbf{n}_\nu$.



Εάν οι σ_i είναι (p_i, q_i)- κώνοι,

$$I_\Delta := \{i \in \{1,\ldots,\nu\} \mid q_i > 1\}, \; J_\Delta := \{i \in \{1,\ldots,\nu\} \mid q_i = 1\}, \; \breve{I}_\Delta := \{i \in I_\Delta \mid p_i = 1\},$$

και X_Δ η τορική επιφάνεια που προκύπτει ύστερα από συγκόλληση των

$$U_i = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\breve{\sigma}_i \cap \mathbb{Z}^2]), \; i \in \{1,\ldots,\nu\},$$

τότε $\mathrm{Sing}(X_\Delta) = \{\mathrm{orb}(\sigma_i) \mid i \in I_\Delta\}$ (με το $\{\mathrm{orb}(\sigma_i) \mid i \in \breve{I}_\Delta\}$ ως το σύνολο των ιδιωμάτων Gorenstein τής X_Δ.) Θέτοντας για κάθε $i \in I_\Delta$

$$\frac{q_i}{q_i - p_i} = \left[\!\left[b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \ldots, b_{s_i}^{(i)} \right]\!\right]$$

και ορίζοντας $\mathbf{u}_1^{(i)} := \mathbf{n}_i, \quad \mathbf{u}_1^{(i)} := \frac{1}{q_i}((q_i - p_i)\mathbf{n}_i + \mathbf{n}_{i+1}),$ και

$$\mathbf{u}_{j+1}^{(i)} = b_j^{(i)} \mathbf{u}_j^{(i)} - \mathbf{u}_{j-1}^{(i)}, \quad \forall j \in \{1,\ldots,s_i\} \; (\mathbf{u}_{s_i+1}^{(i)} = \mathbf{n}_{i+1}),$$

η ελαχιστοτική αποϊδιωματοποίηση $f : X_{\widetilde{\Delta}} \longrightarrow X_\Delta$ τής X_Δ κατασκευάζεται μέσω τής θεωρήσεως τής εκλεπτύνσεως

$$\widetilde{\Delta} := \left\{ \begin{array}{c} \textbf{ΟΙ ΚΩΝΟΙ } \{\sigma_i \mid i \in J_\Delta\} \textbf{ ΚΑΙ} \\ \left\{ \pi_j^{(i)} := \mathbb{R}_{\geq 0}\, \mathbf{u}_j^{(i)} + \mathbb{R}_{\geq 0}\, \mathbf{u}_{j+1}^{(i)} \;\middle|\; i \in I_\Delta,\ j \in \{0, 1, \ldots, s_i\} \right\}, \\ \textbf{ΜΑΖΙ ΜΕ ΤΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΟΥΣ} \end{array} \right\}$$

τού Δ. Σημειωτέον ότι

$$\begin{cases} \mathrm{Div}_{\mathrm{W}}(X_\Delta) = \bigoplus_{i=1}^{\nu} \mathbb{Z}\, C_i, \\ \\ \mathrm{Div}_{\mathrm{W}}(X_{\widetilde{\Delta}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X_{\widetilde{\Delta}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \left(\bigoplus_{i=1}^{\nu} \mathbb{Q}\, \overline{C}_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in I_\Delta} \bigoplus_{j=1}^{s_i} \mathbb{Q}\, E_j^{(i)} \right), \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} E_j^{(i)} := \overline{\mathrm{orb}_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{R}_{\geq 0}\, \mathbf{u}_j^{(i)})}, & \forall i \in I_\Delta \ \&\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, s_i\}, \\ C_i := \overline{\mathrm{orb}_\Delta\, (\mathbb{R}_{\geq 0}\, \mathbf{n}_i)}, & \forall i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}, \\ \overline{C}_i := \overline{\mathrm{orb}_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{R}_{\geq 0}\, \mathbf{n}_i)}, & \forall i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}. \end{cases}$$

Υπολογισμός σημαντικών αναλλοιώτων των $X_\Delta, X_{\widetilde{\Delta}}$

- **Τοπολογική χαρακτηριστική Euler**:

$$e(X_\Delta) = \nu, \quad e(X_{\widetilde{\Delta}}) = e(X_\Delta) + \sum_{i \in I_\Delta} s_i$$

- **Αριθμός Picard**:

$$\rho(X_\Delta) := \operatorname{rank}(\operatorname{Pic}(X_\Delta) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \nu - 2, \quad \rho(X_{\widetilde{\Delta}}) = \rho(X_\Delta) + \sum_{i \in I_\Delta} s_i$$

- **Αριθμός αυτοδιατομής τού κανονιστικού διαιρέτη (Δ.Ν., 2005)**:

$$K_{X_\Delta}^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\tfrac{2}{q_i} - r_i \right) + \sum_{i \in I_\Delta} \left(\tfrac{q_i - p_i}{q_i} + \tfrac{q_i - \widehat{p}_i}{q_i} \right) \quad [r_i := -\overline{C}_i^2, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}]$$

$$= 12 - \nu + \sum_{i \in I_\Delta} \left(\tfrac{q_i - p_i + 1}{q_i} + \tfrac{q_i - \widehat{p}_i + 1}{q_i} - 2 + \sum_{j=1}^{s_i} (b_j^{(i)} - 3) \right)$$

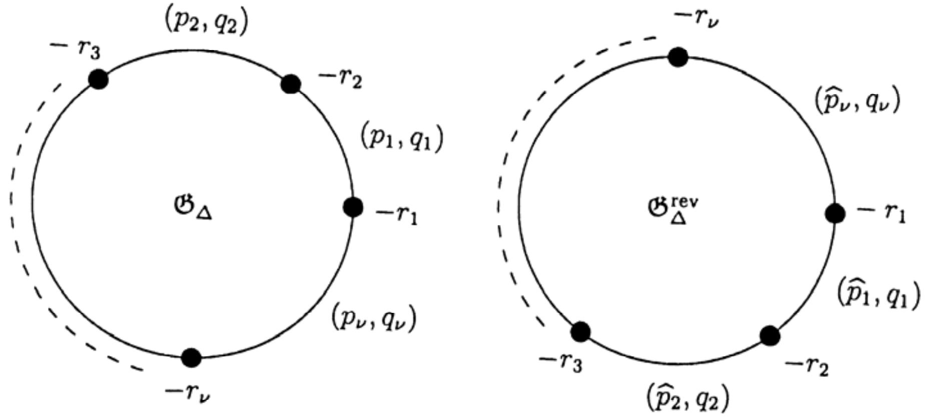
Ταξινόμηση συμπαγών τορικών επιφανειών μέχρις ισομορφισμού με τη βοήθεια «βεβαρημένων» γραφημάτων

- **Θεώρημα (Koelman, 1991, Δ.Ν., 2005)**: *Εάν τα* Δ, Δ' *είναι δυο πλήρη ριπίδια καλύπτοντα το* $\mathbb{R}^2$, *τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*:

(i) $X_\Delta \cong X_{\Delta'}$

(ii) *Είτε* $\mathfrak{G}_{\Delta'} \overset{\text{gr.}}{\cong} \mathfrak{G}_{\Delta}$ *είτε* $\mathfrak{G}_{\Delta'} \overset{\text{gr.}}{\cong} \mathfrak{G}_{\Delta}^{\text{rev}}$.

(Εν προκειμένω, το «$\overset{\text{gr.}}{\cong}$» υποδηλοί τη διαμεσολάβηση γραφοθεωρητικού ισομορφισμού, ήτοι την ύπαρξη μιας αμφιρρίψεως μεταξύ των συνόλων των κορυφών τους που διατηρεί τα αντίστοιχα «βάρη».)



Ειδικά αποτελέσματα
για λείες συμπαγείς τορικές επιφάνειες

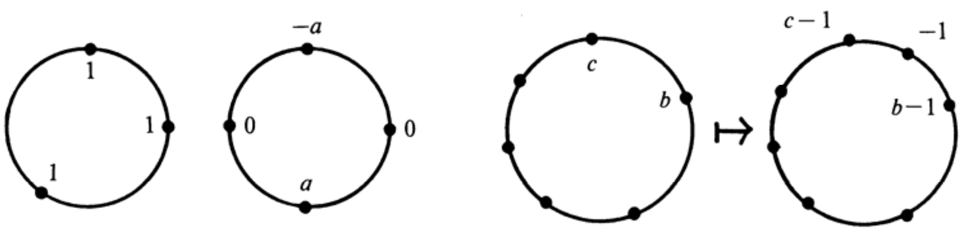
- Σημείωση: Στα γραφήματά τους τοποθετούμε μόνον τα βάρη στις κορυφές.
- **Θεώρημα (T. Oda, 1988)**: *Υπάρχει μια αμφίρριψη μεταξύ τού συνόλου των κλάσεων ισομορφίας λείων συμπαγών τορικών επιφανειών και των γραφημάτων των κάτωθι τύπων:*

(i) Το γράφημα με τρεις κορυφές με βάρη 1, 1, 1 (αντιστοιχεί στο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$).

(ii) Γραφήματα με τέσσερεις κορυφές με βάρη a, 0, -a, 0, όπου a ένας μη αρνητικός ακέραιος (που δίδουν τις λεγόμενες *επιφάνειες Hirzebruch* (1951)

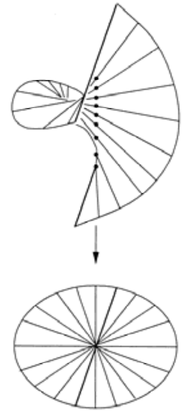
$$\mathbb{F}_a \cong \{([z_0 : z_1 : z_2], [t_1 : t_2]) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} | \, z_1 t_1^a - z_2 t_2^a = 0\} \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(a)). \;)$$

(iii) Γραφήματα με $\nu \geq 5$ κορυφές, τα οποία αποκτώνται από εκείνα με $\nu - 1$ κορυφές ύστερα από πρόσθεση μίας κορυφής με βάρος -1 και την παράλληλη αφαίρεση μίας μονάδας από το βάρος καθεμιάς των δύο παρακειμένων κορυφών.

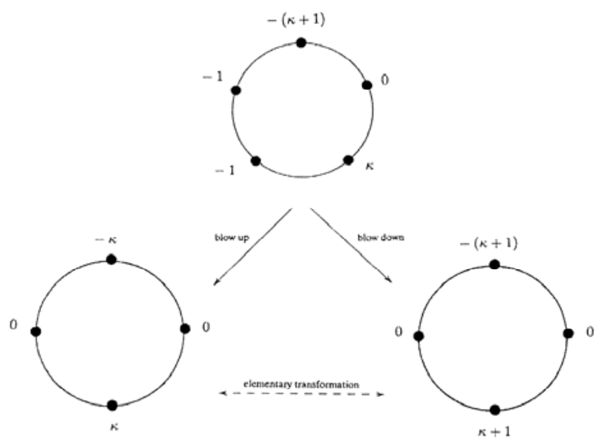


(i) (ii) (iii)

- **Θεώρημα (T. Oda, 1978)**: (i) *Για οιοδήποτε ζεύγος* $X_{\Delta}, X_{\Delta'}$ *λείων συμπαγών τορικών επιφανειών υπάρχουν αμφίρρητες απεικονίσεις* $X_{\Delta''} \longrightarrow X_{\Delta},\ X_{\Delta''} \longrightarrow X_{\Delta'}$, *από μια τρίτη, οι οποίες συντίθενται από πεπερασμένου πλήθους διογκώσεις (ή κατ' άλλους «εκρήξεις», blow-ups) σημείων.*



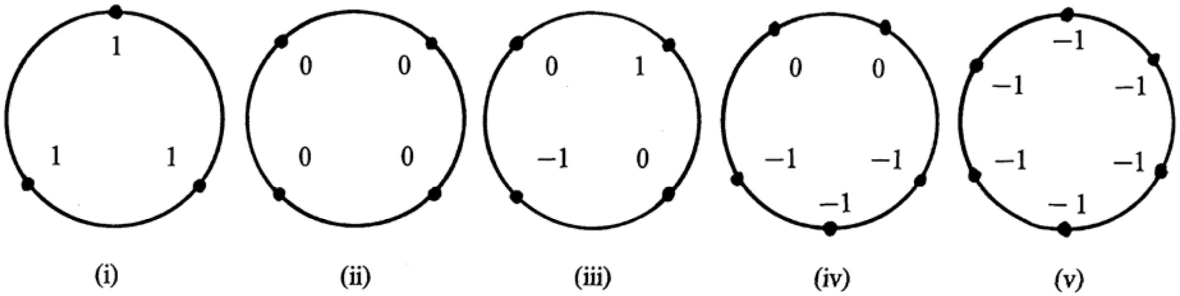
(ii) *Οι μόνες «ελαχιστοτικές» λείες συμπαγείς τορικές επιφάνειες (minimal models, στερούμενες (-1)-καμπυλών) είναι οι* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \{\mathbb{F}_{\kappa} | 0 \leq \kappa \neq 1\}$ *(και συνδέονται μέσω «στοιχειωδών μετασχηματισμών»).*



Περαιτέρω σχόλια και προβλήματα στο πλαίσιο τής Αμφίρρητης Γεωμετρίας

- Εάν κανείς μεταβεί από τα *ελαχιστοτικά μοντέλα* (minimal models) στα (μονοσήμαντα) *αντικανονιστικά/ αντιελαχιστοτικά μοντέλα* (anticanonical/ antiminimal models) των **λείων** συμπαγών τορικών επιφανειών (υπό την έννοια τού F. Sakai), τότε καταλήγει κατ' ανάγκην σε επιφάνειες (log) Del Pezzo.
- **Ορισμός:** Μια λεία μιγαδική συμπαγής επιφάνεια X καλείται **επιφάνεια Del Pezzo** όταν ο αντικανονιστικός διαιρέτης $-K_X$ είναι *ευρύς* (ample). [Τούτο ισοδυναμεί με το ότι $K_X^2 > 0$ και $K_X \cdot C < 0$ για κάθε ανάγωγη καμπύλη C επί τής X.] Αντιστοίχως, μια ορθόθετη μιγαδική συμπαγής επιφάνεια X καλείται **επιφάνεια log Del Pezzo** όταν ο αντικανονιστικός διαιρέτης $-K_X$ είναι *ευρύς* $\mathbb{Q}$-Cartier διαιρέτης. Ως **δείκτης** μιας επιφάνειας log Del Pezzo X ορίζεται ο φυσικός αριθμός $\ell := \min\{\lambda \in \mathbb{N} \mid \lambda K_X \text{ Cartier}\}$.
- Από αποτελέσματα τού F. Sakai (1985) έπεται ότι το αντικανονιστικό μοντέλο οιασδήποτε λείας συμπαγούς τορικής επιφάνειας *οφείλει να είναι log Del Pezzo*.

- **Ερώτημα**: Μπορούν να ταξινομηθούν οι τορικές log del Pezzo επιφάνειες;
- **Θεώρημα (V.V. Batyrev, 1982)**: *Μέχρις ισομορφισμού υφίστανται μόνον 5 τορικές del Pezzo επιφάνειες και μάλιστα αυτές που αντιστοιχούν στα γραφήματα:*



- **Θεώρημα**: *Υπάρχουν μόνον* **πεπερασμένου πλήθους** *κλάσεις ισομορφίας τορικών log del Pezzo επιφανειών* **δεδομένου δείκτη** ℓ.

Τούτο έπεται από το γεγονός ότι υπάρχει μια αμφιρριπτική απεικόνιση μεταξύ των συνόλου των κλάσεων ισομορφίας των τορικών log del Pezzo επιφανειών και τού συνόλου των κλάσεων ισοδυναμίας των λεγομένων «LDP-πολυγώνων». [Ένα (κυρτό) πολύγωνο $Q \subset \mathbb{R}^2$ καλείται **LDP-πολύγωνο** όταν περιέχει το **0** στο εσωτερικό του και όλες του οι κορυφές ανήκουν στο (σύνηθες, ορθογώνιο) κιγκλίδωμα $\mathbb{Z}^2$ και είναι πρωταρχικά σημεία του.]

- Συγκεκριμένα, εάν η X_Δ υποτεθεί ότι είναι μια τορική log Del Pezzo επιφάνεια (παγιωμένου) δείκτη ℓ, τότε σε αυτήν αντιστοιχούμε το LDP-πολύγωνο

$$Q_\Delta := \mathrm{conv}(\{\mathbf{n}_i \mid i \in \{1,2,\ldots,\nu\}\}) \quad \text{με} \quad \mathrm{vert}(Q_\Delta) = \{\mathbf{n}_i \mid i \in \{1,2,\ldots,\nu\}\},$$

και με τη χαρακτηριστική ιδιότητα

$$\ell := \min\{\lambda \in \mathbb{N} \mid \mathrm{vert}(\lambda Q_\Delta^*) \in \mathbb{Z}^2\},$$

όπου $\lambda Q_\Delta^* := \{\lambda \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in Q_\Delta^*\}$ και ως

$$Q_\Delta^* := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq 1, \ \forall \mathbf{y} \in Q_\Delta\}$$

συμβολίζουμε το *πολικό πολύγωνο* τού Q_Δ. Σύμφωνα με ένα αποτέλεσμα τού D. Hensley (1983), $\sharp\{[Q_\Delta] \mid \mathrm{vert}(\ell Q_\Delta^*) \in \mathbb{Z}^2\} < \infty$.

- **Σημείωση**: Εκτός τού αλγεβρογεωμετρικού (αρχικού) ορισμού και τής ως άνω «συνδυαστικής» ερμηνείας τού δείκτη μιας τορικής log Del Pezzo επιφάνειας X_Δ (ως τού ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου των μικροτέρων δυνατών παρονομαστών των ρητών συντεταγμένων των κορυφών τού Q_Δ^*) υπάρχει και μια απευθείας «αριθμοθεωρητική» ερμηνεία (εάν κανείς λάβει υπ' όψιν τους προηγουμένως εισαχθέντες συμβολισμούς):

$$\ell := \mathrm{lcm}\{l_i \mid i \in \{1,2,\ldots,\nu\}\}, \quad l_i := \frac{q_i}{\gcd(q_i, p_i - 1)}, \ \forall i \in \{1,2,\ldots,\nu\}.$$

Χρήσιμες ανισότητες μεταξύ αναλλοιώτων των τορικών log Del Pezzo επιφανειών

- **Θεώρημα (Δ.Ν. & B. Nill, 2007)**: *Για κάθε τορική log Del Pezzo επιφάνεια* X_Δ *με δείκτη* $\ell \geq 1$ *έχουμε*

$$\rho(X_{\widetilde{\Delta}}) \leq \begin{cases} 7, & \ell = 1, \\ 8\ell^2 - 6\ell + 3, & \ell \geq 2. \end{cases}$$

- **Θεώρημα (Δ.Ν., 2007)**: *Για κάθε τορική log Del Pezzo επιφάνεια* X_Δ *με δείκτη* $\ell \geq 1$ *(διατηρώντας τους προηγουμένως εισαχθέντες συμβολισμούς) έχουμε*

$$\sum_{i \in I_\Delta} s_i \leq 12 - \sum_{i \in I_\Delta \smallsetminus \check{I}_\Delta} \left(- \left(\tfrac{q_i - p_i + 1}{q_i} + \tfrac{q_i - \widehat{p}_i + 1}{q_i} \right) + 2 + \sum_{j=1}^{s_i} (2 - b_j^{(i)}) \right) - \left(1 + \tfrac{1}{\ell}\right) \nu.$$

- **Θεώρημα (Δ.Ν., 2007)**: *Για κάθε τορική log Del Pezzo επιφάνεια* X_Δ *με δείκτη* $\ell \geq 2$ *έχουμε*

$$\sum_{i \in \check{I}_\Delta} q_i \leq \left(\sum_{i \in I_\Delta \smallsetminus \check{I}_\Delta} \left(1 - \tfrac{2}{l_i}\right) q_i \right) - (\nu - \sharp(I_\Delta)) + 8.$$

Συμπαγείς τορικές επιφάνειες X_Δ με $\rho(X_\Delta) = 1$

- **Θεώρημα (Δ.Ν., 2007):** *Έστω* X_Δ *μια συμπαγής τορική επιφάνεια με* $\rho(X_\Delta) = 1$.

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα: (i) *Η* X_Δ *είναι log del Pezzo.*

(ii) *Υπάρχει μια τριάδα ζευγών ακεραίων* $\{(p_i, q_i) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i \leq 3\}$ *με*

$$0 \leq p_i < q_i, \ \gcd(p_i, q_i) = 1, \ \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

τέτοια ώστε να ισχύουν οι συνθήκες διαιρετότητας

$$\boxed{q_1 q_2 \mid \widehat{p}_1 q_2 + p_2 q_1 + q_3} \qquad \textit{και} \qquad \boxed{q_1 q_3 \mid p_1 q_3 + \widehat{p}_3 q_1 + q_2}$$

καθώς και ένα ριπίδιο Δ' *με τρεις 2-διάστατους* (p_i, q_i)*- κώνους* σ_i, $i \in \{1, 2, 3\}$,

όπου $\sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}_2, \ \ \sigma_2 = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}_3, \ \ \sigma_3 = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}_3 + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{n}_1,$

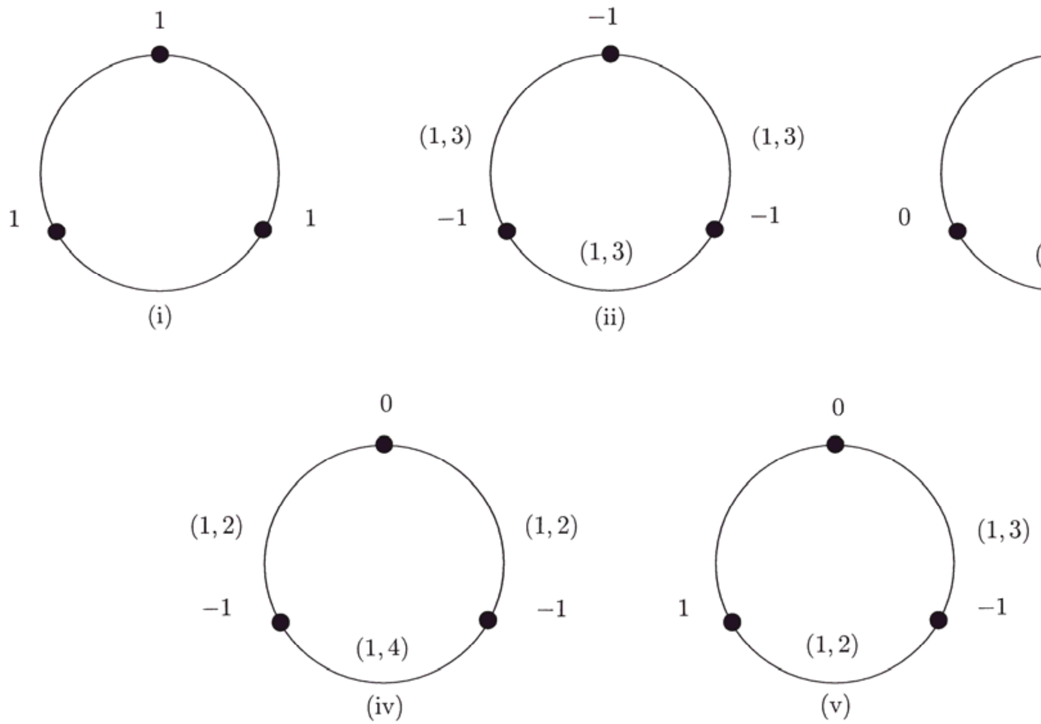
με $\mathbf{n}_1 = \binom{1}{0}, \ \mathbf{n}_2 = \binom{p_1}{q_1}, \ \mathbf{n}_3 = \binom{-(q_2+p_1 q_3)/q_1}{-q_3},$

τέτοιο ώστε να ισχύει

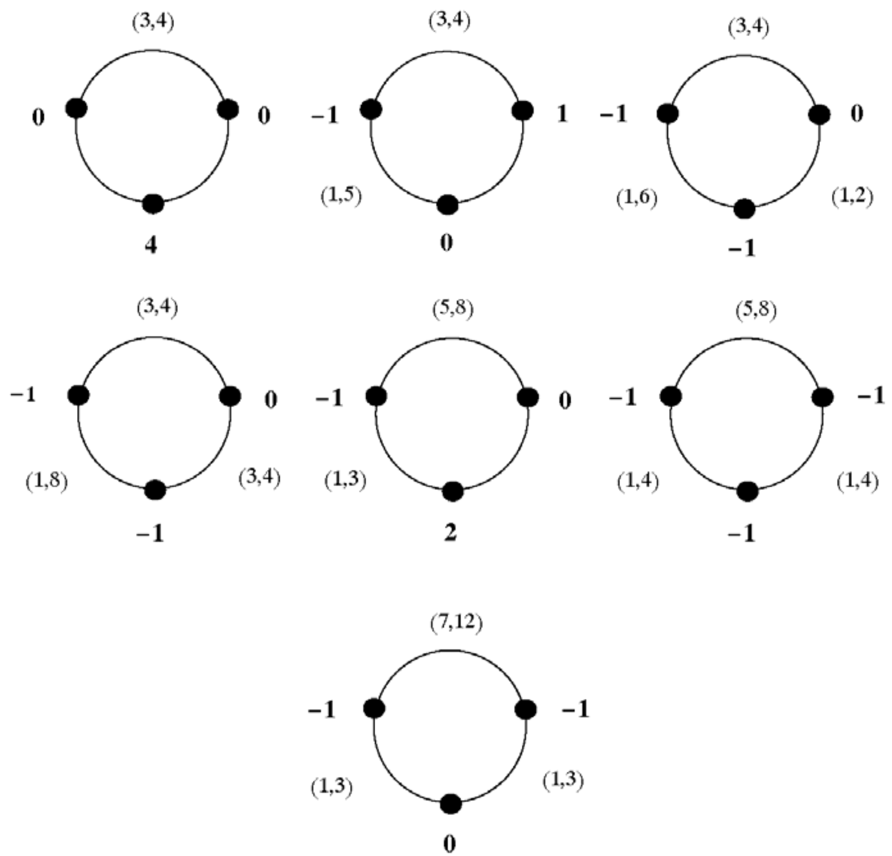
$$X_\Delta \cong X_{\Delta'}.$$

Τορικές επιφάνειες log Del Pezzo με $\rho(X_\Delta) = 1,\ \ell = 1$

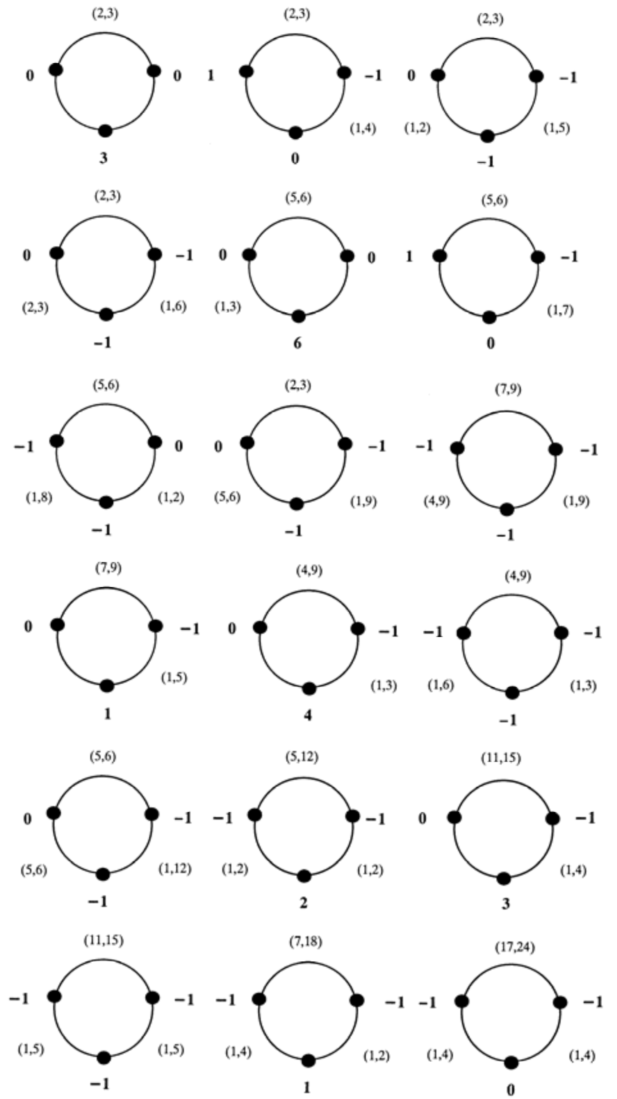
(V.V. Batyrev, 1985, R. Koelman, 1991)



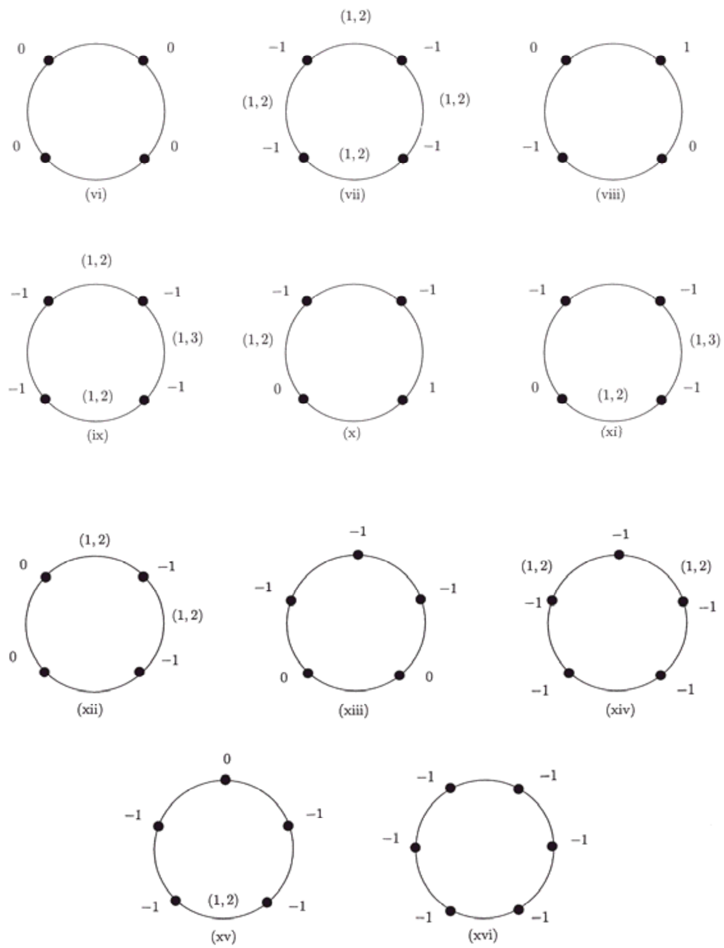
Τορικές επιφάνειες log Del Pezzo με $\rho(X_\Delta) = 1,\ \ell = 2$ (Δ.Ν., 2005)



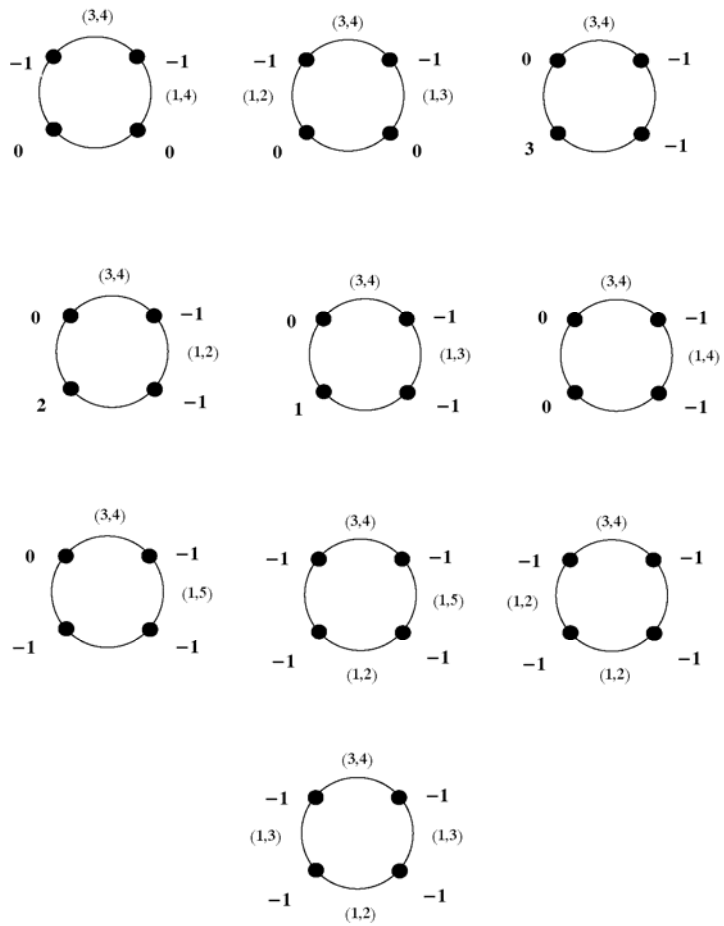
Τορικές επιφάνειες log Del Pezzo με $\rho(X_\Delta) = 1,\, \ell = 3$ (Δ.Ν., 2007)



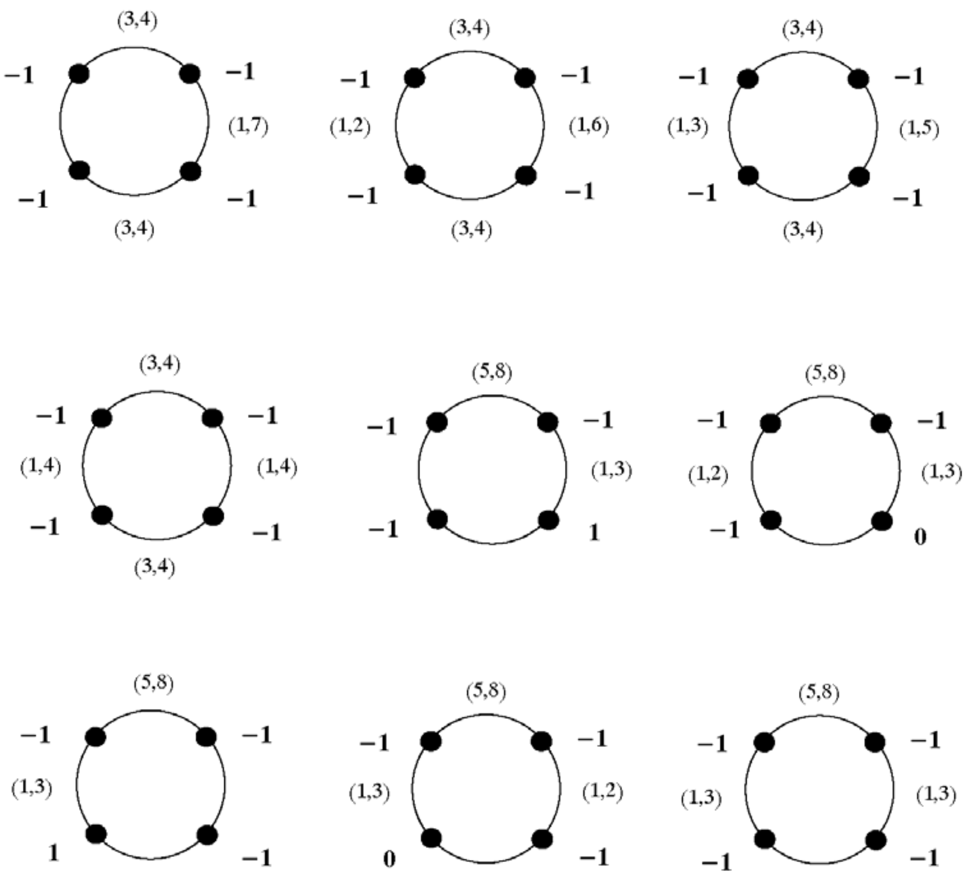
Τορικές επιφάνειες log Del Pezzo με $\rho(X_\Delta) \geq 2, \ell = 1$ (V.V. Batyrev, 1985, R. Koelman, 1991)



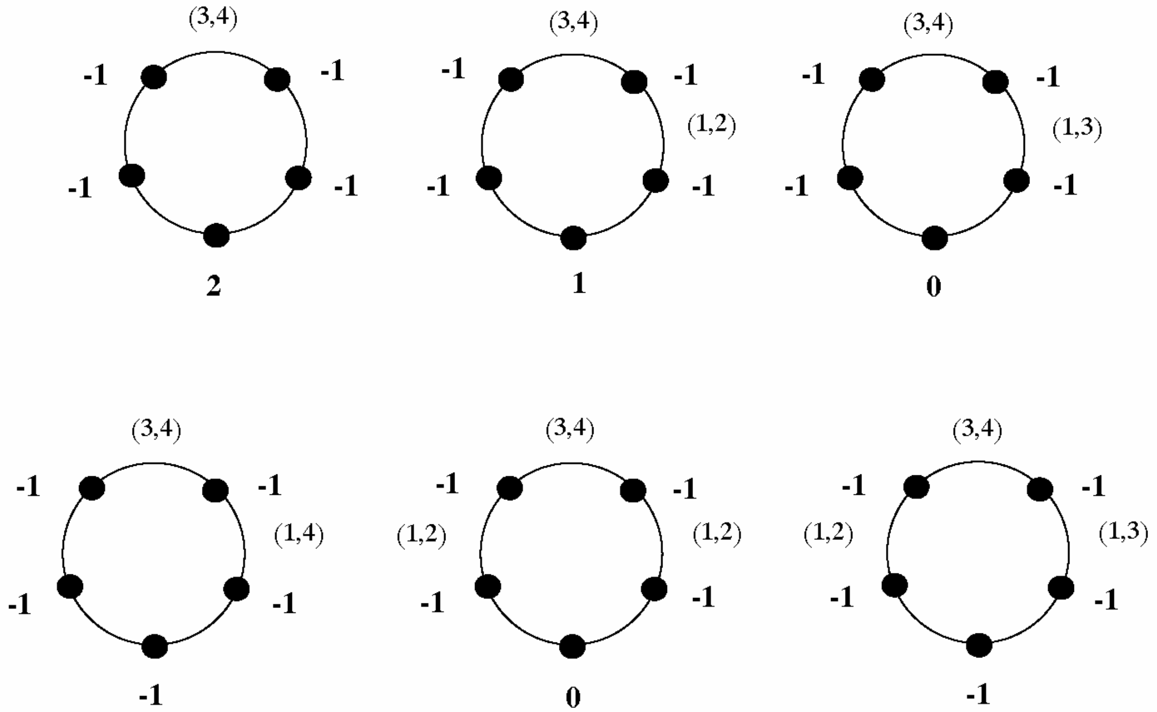
Τορικές επιφάνειες log Del Pezzo με $\rho\left(X_{\Delta}\right)=2,\ \ell=2$ Μέρος Α (B. Nill, 2006)



Τορικές επιφάνειες log Del Pezzo με $\rho(X_\Delta) = 2,\ \ell = 2$ Μέρος Β (B. Nill, 2006)



Τορικές επιφάνειες log Del Pezzo με $\rho(X_\Delta) \geq 3,\ \ell = 2$ (B. Nill, 2006)



Βιογραφικά στοιχεία για τον Pasquale Del Pezzo.

Pasquale Del Pezzo, Duke of Cajanello, (1859–1936), was "the most Neapolitan of Neapolitan Mathematicians".

He was born in Berlin (where his father was a representative of the Neapolitan king) on 2 May 1859. He died in Naples on 20 June 1936. His first wife was the Swedish writer Anne Charlotte Leffler, sister of the great mathematician Gösta Mittag-Leffler (1846-1927).

At the University of Naples, he received first a law degree in 1880 and then in 1882 a math degree. He became a pre-eminent professor at that university, teaching Projective Geometry, and remained at that University, as rector, faculty president, etc.

He was mayor of Naples starting in 1919, and he became a senator in the Kingdom of Naples.

His scientific achievements were few, but they reveal a keen ingenuity. He is remembered particularly for first describing what became known as a Del Pezzo surface. He might have become one of the strongest mathematicians of that time, but he was distracted by politics and other interests.