
Ασκήσεις Εβδομάδας 25-11-2019

1. (*) Να βρεθεί ο πίνακας της γραμμικής συνάρτησης $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, με $\phi(a, b, c, d) = (a + 2b + d, -a + 3b + c - d, 2a + b - d, 2b - c + 7d)$.
ως προς την κανονική βάση.

2. (*) Δίνεται η γραμμική συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y - z, 2x + 3y).$$

- (α) Να βρεθεί ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση.
(β) Να δοθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα στοιχείο (a, b, c) του \mathbb{R}^3 να ανήκει στην $\text{Im} f$.
(γ) Να βρεθεί $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ώστε $f(x, y, z) = (2, 3, 5)$.
(δ) Να υπολογιστεί ο $\text{Ker} f$.

3. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto Av.$$

Να βρείτε μία βάση των \mathbb{R} -διανυσματικών χώρων $\text{Ker} f$ και $\text{Im} f$.

4. (*) Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστεί ο $\text{null}(A)$ και να βρεθούν σχέσεις γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών του πίνακα A . Να περιγραφεί ο $\text{Ker} f$, όπου f ο ενδομορφισμός $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, v \mapsto Av$.

5. (*) Δίνεται η γραμμική συνάρτηση $f : V \rightarrow V$, όπου V είναι K -διανυσματικός χώρος. Αν $f = f^2$, να αποδείξετε ότι $V = \text{Ker} f \oplus f(V)$.
6. (*) Έστω $B = (e_1, e_2)$ η συνήθης βάση του \mathbb{R}^2 , $D = (1, x)$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}_1[x]$ και

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

- i) Να βρεθεί η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, όταν $A = A_{BB}^f$.

-
- ii) Να βρεθεί η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$, όταν
 $A = A_{D,B}^f$.
- iii) Να βρεθεί η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$, όταν
 $A = A_{B,D}^f$.
- iv) Να βρεθεί η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$, όταν
 $A = A_{DD}$.
7. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η γραμμική συνάρτηση, με $f(v_1) = 2v_1$ και $f(v_2) = -v_2$, όπου $v_1 = (1, 1)$ και $v_2 = (1, -1)$. Να βρεθεί ο τύπος της f .