Ασκήσεις Εβδομάδας 18-11-2019

1. **(*)** Δίνεται ο υποχώρος $V = S\big(\{(1,1,1),\ (1,0,1)\}\big)$ του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

   (α΄) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου V.

   (β΄) Να βρείτε τρεις διαφορετικές ευθείες πάνω στον V.

   (γ΄) Να δείξετε ότι υπάρχει υποχώρος W του $\mathbb{R}^3$ τέτοιοι ώστε $V+W = \mathbb{R}^3$, όμως το άθροισμα να μην είναι ευθύ. Πόσοι τέτοιοι υποχώροι υπάρχουν;

   (δ΄) Να βρείτε έναν υποχώρο W του $\mathbb{R}^3$ ώστε $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

2. Αν $A = \{\,(\alpha_{ij}) \in M_2(K) \,:\, \alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0\}$, $K = \{\,(\kappa_{ij}) \in M_n(K) \,:\, \kappa_{11} = \kappa_{12} = \kappa_{22} = 0\}$ και D το σύνολο των διαγώνιων πινάκων του K-διανυσματικού χώρου $M_n(K)$, να αποδείξετε ότι $M_2(K) = A \oplus K \oplus D$. Να γενικεύσετε για το $M_n(K)$.

3. Δίνονται οι υποχώροι

$$V_1 = S\big(\{\,(-1,0,0)\,\}\big), \quad V_2 = \big\{\,(t,0,2t) \,:\, t \in \mathbb{R}\,\big\},$$

$$V_3 = \big\{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y-z=0 \ \text{ και } \ x-2y+z=0\,\big\}$$

   του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$. Να αποδείξετε ότι $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

4. **(*)** Δίνονται οι υποχώροι V και W του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^5$ με $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$ και $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει στοιχείο $v \neq 0$ του $\mathbb{R}^5$ τέτοιο ώστε $v \in V \cap U$.

5. **(*)** Δίνονται οι υποχώροι V και W του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^{10}$ με $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$ και $\dim_{\mathbb{R}} W = 8$. Να βρείτε ποιές είναι οι δυνατές διαστάσεις των χώρων $V \cap U$ και $V + W$.

6. Να ορίσετε μία μη μηδενική γραμμική συνάρτηση $f : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$.

7. **(*)** Δίνεται η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad (x,y,z) \mapsto (x+2y,\ y-z,\ x+2z).$$

   (α΄) Να αποδείξετε ότι η f είναι γραμμική συνάρτηση.

   (β΄) Να περιγράψετε το σύνολο $\{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = 0\}$, να συμπεράνετε ότι αποτελεί υποχώρο του $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε μία βάση.

(γ΄) Να περιγράψετε το σύνολο $\mathrm{Im} f = \{w \in \mathbb{R}^3 : \exists v \in \mathbb{R}^3,\ \text{τέτοιο ώστε } f(v) = w\}$, να δείξετε ότι αποτελεί υποχώρο του $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε μία βάση.

(δ΄) Να περιγραφεί το σύνολο $f^{-1}(W) = \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) \in W\}$, όπου $W = \big\{ (t, t, -t) \,:\, t \in \mathbb{R} \big\} \leq \mathbb{R}^3$.

8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f : M_2(K) \to M_{2\times 3}(K)\ , \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b & a-b \\ 0 & d & c+b+d \end{bmatrix}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι γραμμική συνάρτηση.