Ασκήσεις Εβδομάδας 11-11-2019

1. **(*)** **i)** Για ποιές τιμές του a τα στοιχεία
$$v_1 = (1, 1, a), \quad v_2 = (2, 0, 1), \quad v_3 = (3, -1, 1)$$
αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$;

   ii) Να εκφρασθεί το $(1, 0, 0)$ ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων v_1, v_2, v_3 του ζητήματος **i)**.

2. **(*)** Δίνονται τα στοιχεία
$$(1, 1, 1), \quad (1, a^2, 1), \quad (1, 3a, 1 + a^2)$$
του K-διανυσματικού χώρου K^3. Να προσδιορίσετε τις τιμές του a για τις οποίες τα στοιχεία αυτά να αποτελούν βάση για τον K^3.

3. **(*)** Να βρεθούν βάσεις για τον χώρο γραμμών και τον χώρο στηλών του πίνακα
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Έστω $B_1 = \{e_1, e_2\}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^2$, $B_2 = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $v = (2, 3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του v ως προς τη βάση B_1 και στη συνέχεια ως προς τη βάση B_2.

5. Έστω η συνήθης βάση $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ του $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του A
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$
ως προς τη βάση B.

6. Έστω $\mathbb{R}_2[x]$ το υποσύνολο του $\mathbb{R}[x]$ που αποτελείται από όλα τα πολυώνυμα με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{R}$ με βαθμό το πολύ 2.

   - Να αποδείξετε ότι $\mathbb{R}_2[x]$ είναι υποχώρος του $\mathbb{R}[x]$.
   - Να αποδείξετε ότι το σύνολο $B = \{1, x, x^2\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}_2[x]$.
   - Να βρείτε τις συντεταγμένες του $-1 + 2x + 3x^2$ ως προς τη βάση B.

7. Να αποδείξετε ότι τα στοιχεία

$$1, \quad 1-x, \quad (x-1)(x-2)$$

αποτελούν μία βάση D του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}_2[x]$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του $-1+2x+3x^2$ ως προς τη βάση D.

8. Να αποδείξετε ότι τα στοιχεία $(5,-1,1,4)$, $(1,0,2,0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$. Να συμπληρώσετε αυτά τα στοιχεία ώστε να λάβετε μία βάση του $\mathbb{R}^4$ παίρνοντας στοιχεία από το σύνολο $A = \{\, (2,0,0,0),\ (1,1,1,1),\ (-1,1,-1,1),\ (2,1,0,1)\,\}$.

9. **(*)** Δίνονται οι υποχώροι

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \,:\, \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \right\},$$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & \gamma \end{bmatrix} \,:\, \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $M_2(\mathbb{R})$. Να βρείτε μία βάση των χώρων U και V, $U+V$, $U \cap V$.

10. **(*)** Δίνεται ο υποχώρος $V = S(\{(1,1,1),(1,0,1)\})$ του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$. Να βρείτε έναν υποχώρο W του $\mathbb{R}^3$ ώστε $\mathbb{R}^3 = V + W$.

11. Για τα παρακάτω παραδείγματα $\mathbb{R}$-διανυσματικών χώρων $U \leq V$ να επεκτείνετε μία βάση του U σε μία βάση του V.

    i) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x+y=0 \,\right\},$

    ii) $V = \mathbb{R}^3, \quad U = \left\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y+3z=0 \,\right\},$

    iii) $V = \mathbb{R}^4, \quad U = S\big(\{\, (1,0,2,1),\ (3,1,0,0),\ (2,0,1,4)\,\}\big).$

12. **(*)** Δίνονται τα γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία $v_1,\ldots,v_n$ του K-διανυσματικού χώρου V και το μη μηδενικό στοιχείο

$$v = \kappa_1 v_1 + \cdots + \kappa_n v_n$$

του V, όπου $\kappa_1,\ldots,\kappa_n \in K$. Να αποδείξετε ότι τα στοιχεία

$$v - v_1, \cdots, v - v_n$$

είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν $\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_n = 1$. Στην περίπτωση αυτή να βρείτε μία γραμμική σχέση εξάρτησης.