
Ασκήσεις Εβδομάδας 4-10-2019

1. Έστω $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, $U = \{(t, s + t, t) : t, s \in \mathbb{R}\}$.

(α) Να βρείτε τον μικρότερο υποχώρο που περιέχει το σύνολο $V \cup U$.

(β) Να περιγράψετε την τομή $V \cap U$.

2. (*) Δίνονται τα υποσύνολα

$$U = \{(k, k, k) : k \in \mathbb{R}\} \quad \text{και} \quad V = \{(0, \lambda, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

του \mathbb{R}^3 . Να περιγράψετε τον χώρο $U + V$ και τον χώρο $U \cap V$.

3. Να εξετάσετε αν τα στοιχεία

$$u_1 = (1, 0, 2, 1), \quad u_2 = (0, 0, 2, 4), \quad u_3 = (0, 1, 0, 2), \quad u_4 = (2, 0, 4, 2)$$

του \mathbb{R}^4 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

4. Είναι τα στοιχεία

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου $M_2(\mathbb{R})$;

5. (*) Να αποδείξετε ότι τα στοιχεία

$$(1, 1, 1), \quad (1, a^2, 1), \quad (-1, a, -1)$$

του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^3 είναι γραμμικά εξαρτημένα για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και να βρείτε μία γραμμική σχέση εξάρτησης μεταξύ των στοιχείων αυτών.

6. Δίνονται τα στοιχεία

$$v_1 = (1, 2, 0, 1), \quad v_2 = (0, 1, 3, -1), \quad v_3 = (1, 1, -3, 2)$$

του \mathbb{R}^4 . Να βρείτε μία σχέση γραμμικής εξάρτησης για τα στοιχεία αυτά και μία βάση για τον χώρο $S(\{v_1, v_2, v_3\})$.

7. (*) Να βρείτε βάσεις για τους παρακάτω υποχώρους U του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^4 .

i) $U = S(\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 0)\})$,

ii) $U = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0 \},$

iii) $U = S(\{ (1, 0, 2, -1), (3, 1, 0, 0), (2, 0, 4, -2) \}).$

8. (*) Δίνονται οι υποχώροι

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\},$$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & \gamma \end{bmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου $M_2(\mathbb{R})$. Να βρείτε μία βάση των χώρων U και V ,

9. Να βρείτε μία βάση για τον υποχώρο των συμμετρικών πινάκων του $M_2(\mathbb{R})$.
10. Να βρείτε μία βάση για τον υποχώρο των αντισυμμετρικών πινάκων του $M_2(\mathbb{R})$.
11. Έστω ο \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος V των πραγματικών συναρτήσεων $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- i) Να εξετάσετε αν το σύνολο $\{\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
- ii) Να εξετάσετε αν το σύνολο $\{e^x, x, x^2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
12. Έστω ο \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος V των πραγματικών συναρτήσεων $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{x, \sqrt{2}x\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, όταν θεωρούμε τον V ως \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο και γραμμικά ανεξάρτητο, όταν θεωρούμε τον V ως \mathbb{Q} -διανυσματικό χώρο.