Ασκήσεις Εβδομάδας 29-10-2019

1. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\mathbb{R}^+ = \{\, a \in \mathbb{R} \;:\; a > 0 \,\}$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος με πράξεις:

$$\begin{aligned} \oplus &: \; a \oplus b = ab, \\ \odot &: \; \kappa \odot a = a^{\kappa}, \end{aligned}$$

   όπου $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

2. **(*)** Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\mathbb{R}^2$ δεν είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος ως προς τις πράξεις

$$\begin{aligned} + &: \; (a_1, a_2) + (\beta_1, \beta_2) = (a_1 + a_2,\ \beta_1 + \beta_2), \\ \cdot &: \; \kappa(a_1, a_2) = (\kappa a_1,\ 0), \end{aligned}$$

   όπου $\kappa, a_i, b_i \in \mathbb{R}$, για $i = 1, 2$.

3. Δίνονται οι K-διανυσματικοί χώροι V_1 και V_2, όπου K είναι ένα σώμα. Στο καρτεσιανό γινόμενο $V_1 \times V_2$ ορίζονται η πρόσθεση και ο εξωτερικός πολλαπλασιασμός ως εξής:

$$\begin{aligned} + &: \; (v_1, v_2) + (u_1, u_2) = (v_1 + u_1,\ v_2 + u_2), \\ \cdot &: \; \kappa(v_1, v_2) = (\kappa v_1, \kappa v_2), \end{aligned}$$

   όπου $\kappa \in K$, $v_i, u_i \in V_i$, για $i = 1, 2$. Να αποδείξετε ότι ο $V_1 \times V_2$ γίνεται ένας K-διανυσματικός χώρος ως προς τις πράξεις αυτές.

4. Δίνεται ο K-διανυσματικός χώρος V, όπου K είναι ένα σώμα. Στο καρτεσιανό γινόμενο n πλήθους αντιγράφων του V, $V^n = V \times \cdots \times V$, ορίζονται η πρόσθεση και ο εξωτερικός πολλαπλασιασμός ως εξής:

$$\begin{aligned} + &: \; (v_1, \ldots, v_n) + (u_1, \ldots, u_n) = (v_1 + u_1, \ldots,\ v_n + u_n), \\ \cdot &: \; \kappa(v_1, \ldots, v_n) = (\kappa v_1, \ldots, \kappa v_n), \end{aligned}$$

   όπου $\kappa \in K$, $v_i, u_i \in V_i$, για $i = 1, \ldots, n$. Να αποδείξετε ότι ο V^n γίνεται ένας K-διανυσματικός χώρος ως προς τις πράξεις αυτές.

5. Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x + y = 0 \,\}$ είναι υποχώρος του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

6. **(*)** Να εξετάσετε αν το σύνολο $V = \{\, A \in M_2(\mathbb{R}) \;:\; \det A \neq 0 \,\}$ είναι $\mathbb{R}$-υποχώρος του $M_2(\mathbb{R})$.

7. Να αποδείξετε ότι το σύνολο όλων των συμμετρικών πινάκων του $M_2(\mathbb{R})$ αποτελούν $\mathbb{R}$-υποχώρο του $M_2(\mathbb{R})$. Να εξετάσετε το ίδιο πρόβλημα για τους αντισυμμετρικούς πίνακες του $M_3(\mathbb{R})$.

8. **(*)** Να αποδείξετε ότι το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{\, f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν τα παρακάτω σύνολα είναι υποχώροι του $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

   i) $V_1 = \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής}\}$,

   ii) $V_2 = \left\{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0 \right\}$,

   iii) $V_3 = \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f'(x) = 0 \,\}$.

9. **(*)** Δίνονται τα υποσύνολα

$$U = \big\{\, (k, k, k) \ : \ k \in \mathbb{R} \,\big\} \quad \text{και} \quad V = \big\{\, (0, \lambda, \mu) \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,\big\}$$

του $\mathbb{R}^3$. Να αποδείξετε ότι οι $U,\ V$ είναι υποχώροι του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$. Να βρείτε σύνολα X_1, X_2 τέτοια ώστε $U = S(X_1)$, $V = S(X_2)$.

10. **(*)** Να αποδείξετε ότι τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$

$$V = \big\{\, (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = -2x \,\big\}, \quad W = \big\{\, (t + s, 3t, t) \ : \ t, s \in \mathbb{R} \big\},$$
$$U = \big\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x + y - z = 0 \,\big\}$$

είναι υποχώροι του $\mathbb{R}^3$.

11. **(*)** Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου $S\big(\big\{(1, 2, 0), (1, 0, 1)\big\}\big)$ του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

12. **(*)** Να αποδείξετε ότι για τα υποσύνολα

$$X = \big\{(1, 0), (1, 1)\big\} \quad \text{και} \quad Y = \big\{(0, 1), (1, 2)\big\}$$

του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ ισχύει $S(X) = S(Y)$.

Όμοια για τα υποσύνολα

$$Z = \big\{(-1, 1, 0), (1, 0, 1)\big\} \quad \text{και} \quad W = \big\{(-1, 1, 0), (0, 1, 1)\big\}$$

του $\mathbb{R}^3$.

13. Να υπολογίσετε τον υποχώρο $S(\{I_n\})$ του K-διανυσματικού χώρου $M_n(K)$.

14. **(*)** Να υπολογισθεί το β ώστε το $(1, 2, \beta) \in S\big(\{\ (1, 1, 1),\ (3, 2, 1)\ \}\big)$.