Ασκήσεις Εβδομάδας 21-10-2019

1. **(*)** Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\text{i)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &+& z &=& 0\\ x &+& 2y &-& z &=& 0\\ 2x &+& 3y && &=& 0 \end{array} \qquad \text{ii)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &+& z &=& 1\\ x &+& 2y &-& z &=& 2\\ 2x &+& 3y && &=& 0 \end{array}$$

$$\text{iii)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &+& z &=& 1\\ x &+& 2y &-& z &=& 2\\ 2x &+& 3y && &=& 3. \end{array}$$

2. **(*)** Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Να λυθούν τα συστήματα $A\,X = B$ και $A^T X = B$.

3. **(*)** Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 &-& 2\,x_2 &+& x_3 &+& 3\,x_4 &-& x_5 &=& 0\\ 2\,x_1 &+& x_2 && &+& x_4 &+& x_5 &=& 3\\ x_1 &-& 7\,x_2 &+& 3\,x_3 &+& 8\,x_4 &-& 4\,x_5 &=& -3\\ -3\,x_1 &-& 4\,x_2 &+& x_3 &+& x_4 &+& 3\,x_5 &=& 0\,. \end{array}$$

Αν A είναι ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος, να βρείτε τον $\mathrm{null}(A)$. Βεβαιώστε ότι ενώ το σύστημα έχει περισσότερες από μία λύσεις, υπάρχει άγνωστος του συστήματος που έχει μοναδική λύση.

4. **(*)** Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ a \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε την τιμή του a ώστε το σύστημα $A\,X = B$ να έχει λύση. Για την τιμή αυτή να λύσετε το σύστημα, αφού πρώτα βρείτε τις λύσεις του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος.

5. **(*)** Να λυθούν με τη μέθοδο Cramer τα παρακάτω συστήματα:

i)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1\,. \end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & & & & & + & x_4 & = & 3 \\ -\,x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 9\,. \end{array}$$

6. **(*)** Έστω ότι ο επεκτεταμένος πίνακας του συστήματος $AX = B$ έχει κλιμακωτή μορφή γραμμών τον πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Να λυθεί το σύστημα. Να βρείτε τη λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος. Για ποιούς πίνακες $C \in M_{2\times 1}(K)$ το σύστημα $AX = C$ δεν έχει λύση;

7. **(*)** Δίνεται το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2ay & + & z & = & 0 \\ x & + & 2ay & + & az & = & 0 \\ ax & + & 4ay & + & 2z & = & 0\,. \end{array}$$

Να εξετάσετε τον $\mathrm{null}(A)$ για όλες τις πιθανές τιμές του a, όπου A είναι ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος.

8. **(*)** Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & \kappa z & = & 0 \\ x & + & \lambda y & + & \mu z & = & 0\,, \end{array}$$

για $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

9. **(*)** Μπορεί να προσδιοριστεί ένας πίνακας του $M_2(\mathbb{R})$ αν είναι γνωστό το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του;

10. **(*)** **i)** Να βρεθεί πολυωνυμική καμπύλη βαθμού το πολύ 2 που διέρχεται από τα σημεία $(-2, 5)$, $(1, -4)$, $(3, 0)$.

ii) Να βρεθεί πολυωνυμική καμπύλη βαθμού το πολύ 3 που διέρχεται από τα σημεία $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 6)$.

11. **(*)** Να αποδείξετε ότι από $n+1$ σημεία $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ με $x_i \neq x_j$, $1 \leq i < j \leq n+1$, περνούν άπειρες πολυωνυμικές καμπύλες βαθμού $\geq n+1$.

12. **(*)** Έστω πίνακας $A \in M_{n\times m}(K)$. Να αποδείξετε τα εξής:

13. **(*)** Σε εμβόλιμη εξεταστική στην οποία μετέχουν 100 φοιτητές εξετάζονται τέσσερα μαθήματα. Το πλήθος των φοιτητών που επέλεξαν να εξεταστούν σε ένα ή σε τέσσερα μαθήματα ισούται με το πλήθος των φοιτητών που επέλεξαν να εξεταστούν σε δύο ή σε τρία μαθήματα. Επίσης κάθε ένα από τα τέσσερα μαθήματα επιλέχθηκε από 70 φοιτητές. Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο δυνατόν πλήθος φοιτητών που επέλεξαν να εξεταστούν και στα τέσσερα μαθήματα.