Ασκήσεις Εβδομάδας 14-10-2019

1. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο του γινομένου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ και $c \neq 0$, χρησιμοποιώντας τους στοιχειώδεις πίνακες.

2. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Να υπολογιστούν οι παρακάτω ορίζουσες:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -4 & 7 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

4. Να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & a_3 \\ -b_1 & b_2 & -b_3 \\ c_1 & -c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Έστω οι $n \times n$-πίνακες $A = (\alpha_{ij})$ και $B = (\beta_{ij})$, με $\beta_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. Ισχύει $\det A = \det B$;

5. Να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} a_1+\beta_1 & a_2+\beta_2 & a_3+\beta_3 \\ \beta_1+\gamma_1 & \beta_2+\gamma_2 & \beta_3+\gamma_3 \\ \gamma_1+a_1 & \gamma_2+a_2 & \gamma_3+a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

6. Να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} \nu a_1+\beta_1 & \nu a_2+\beta_2 & \nu a_3+\beta_3 \\ \nu\beta_1+\gamma_1 & \nu\beta_2+\gamma_2 & \nu\beta_3+\gamma_3 \\ \nu\gamma_1+a_1 & \nu\gamma_2+a_2 & \nu\gamma_3+a_3 \end{vmatrix} = (\nu^3+1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

7. Να αποδείξετε ότι η ορίζουσα ενός αντισυμμετρικού πίνακα $A \in M_5(\mathbb{R})$ ισούται με 0.

8. Να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} a+\beta & \beta & \beta & \beta \\ \beta & a+\beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & a+\beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta & a+\beta \end{vmatrix} = a^3(a+4\beta).$$

9. Να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x(x-y)^2(x+y)^2.$$

10. Να αποδείξετε ότι
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a).$$

11. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες
$$\begin{vmatrix} (a-r)^2 & (a-s)^2 & (a-t)^2 & a^2 \\ (\beta-r)^2 & (\beta-s)^2 & (\beta-t)^2 & \beta^2 \\ (\gamma-r)^2 & (\gamma-s)^2 & (\gamma-t)^2 & \gamma^2 \\ r & s & t & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (a-r)^2 & (a-s)^2 & (a-t)^2 & a^2 \\ (\beta-r)^2 & (\beta-s)^2 & (\beta-t)^2 & \beta^2 \\ (\gamma-r)^2 & (\gamma-s)^2 & (\gamma-t)^2 & \gamma^2 \\ r^3 & s^3 & t^3 & 0 \end{vmatrix}.$$

12. Δίνεται ο πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Να υπολογίσετε την $\det A$ και τον A^{-1}.

13. Να υπολογίσετε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων με τη μέθοδο του προσαρτημένου πίνακα:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -9 \\ 1 & -2 & 7 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

14. Έστω A ένας κάτω τριγωνικός 3×3-πίνακας. Να αποδείξετε ότι ότι ο A αντιστρέφεται αν και μόνο αν όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του είναι διαφορετικά του μηδέν. Στην περίπτωση αυτή να δείξετε ότι και ο A^{-1} είναι κάτω τριγωνικός πίνακας. Τι παρατηρείτε για τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του A^{-1};

15. Δίνονται οι πίνακες
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Αφού αποδείξετε ότι ο πίνακας A αντιστρέφεται, να βρείτε πίνακες X, Y και Z, ώστε
$$A\cdot X = B, \quad Y\cdot A + 5\,I_3 = A\cdot A^T \quad A\cdot Z\cdot A^T - 2\,B = I_3.$$