Ασκήσεις Εβδομάδας 7.10.19

Στα επόμενα συμβολίζουμε με K ένα από τα σώματα αριθμών $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

1. Έστω $A \in M_{m\times n}(K)$. Να βρεθεί κατάλληλος πίνακας B, τέτοιος ώστε το γινόμενο πινάκων AB να είναι η j-στη στήλη του A. Να βρεθεί κατάλληλος πίνακας C, τέτοιος ώστε το γινόμενο πινάκων CA να είναι η i-στη γραμμή του A.

2. Έστω $A \in M_{m\times n}(K)$.

   - Να βρεθεί κατάλληλος πίνακας C, τέτοιος ώστε το γινόμενο πινάκων CA να είναι η k φορές η i-στη γραμμή του A.
   - Να βρεθεί κατάλληλος πίνακας C, τέτοιος ώστε το γινόμενο πινάκων CA να είναι η j-στη γραμμή τους A στην οποία έχει προστεθεί k φορές η i-στη γραμμή του A.

3. **(*)** Έστω οι πίνακες
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Να αποδείξετε ότι
$$A^2 = 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = 3^2\, B$$
ενώ
$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{και } B^4 = I_2.$$
Να συμπεράνετε ότι
$$A^{16} = (A^4)^4 = 3^4 I_2 \text{ ενώ } A^{20} = (A^4)^5 = 3^{10}B.$$
Να βρείτε τύπους για τις δυνάμεις
$$A^{24}, A^{28}, A^{32}, A^{100}.$$
Να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας με το πρόγραμμα Mathematica.

4. Δίνεται ο αντιστρέψιμος πίνακας A και οι πίνακες $B, \Gamma \in M_n(K)$ έτσι ώστε $A = B + \Gamma$. Να αντικαταστήσετε τον A στις σχέσεις $A\, A^{-1} = I_n$ και $A^{-1}A = I_n$ και να πολλαπλασιάσετε με τον κατάλληλο πίνακα από αριστερά ή δεξιά κάθε μία από τις δύο σχέσεις για να αποδείξετε ότι
$$BA^{-1}\Gamma = \Gamma A^{-1}B.$$

5. **(*)** Δίνεται ο πίνακας $A \in M_n(K)$. Να αποδείξετε ότι:

   i) ο πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός,

   ii) ο πίνακας $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός,

   iii) ο πίνακας $A\,A^T$ είναι συμμετρικός,

   iv) ο πίνακας A γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα,

   v) αν ο πίνακας A είναι αντισυμμετρικός, τότε όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι μηδέν.

   vi) αν οι πίνακες A και B είναι αντισυμμετρικοί, τότε και ο πίνακας $AB - BA$ είναι αντισυμμετρικός.

6. **(*)** Δίνονται δύο συμμετρικοί πίνακες $A, B \in M_n(K)$. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο AB είναι συμμετρικός πίνακας αν και μόνο αν $AB = BA$.

7. **(*)** Έστω $A \in M_n(K)$ ένας συμμετρικός αντιστρέψιμος πίνακας. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας A^{-1} είναι επίσης συμμετρικός πίνακας.

8. Έστω $A \in M_n(K)$, $A \neq I_n$, ένας πίνακας τέτοιος ώστε $A^2 = A$. Να αποδείξετε ότι:

   i) ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος,

   ii) $(I_n - A)^2 = I_n - A$,

   iii) $(PAP^{-1})^2 = PAP^{-1}$ για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα P,

   iv) $A^m = A$, για κάθε $m \geq 1$.

9. Η άσκηση αυτή αναφέρεται σε πίνακες με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε μιγαδικός αριθμός είναι της μορφής $a + bi$ για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$ και ότι οι κανόνες που ισχύουν για τους μιγαδικούς αριθμούς έχουν ως εξής:

   - $i^2 = -1$,
   - $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$,
   - $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$,
   - $\overline{a + bi} = a - bi$.

   Αν $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$, τότε με $\overline{A}$ εννοούμε τον πίνακα $(\overline{a_{ij}})$.

(αʹ) Έστω $A \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$, $B \in M_{m\times s}(\mathbb{C})$. Να δείξετε ότι

$$\overline{A\,B} = \overline{A}\ \overline{B}\,.$$

(βʹ) Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ αντιστρέψιμος πίνακας. Να δείξετε ότι

$$\overline{A^{-1}} = (\overline{A})^{-1}.$$

10. Να φέρετε τους παρακάτω πίνακες σε κλιμακωτή μορφή και σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 8 & 6 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 3 & 5 & 0 \\ -1 & 5 & 9 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

11. Να υπολογίσετε τη βαθμίδα των παρακάτω πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$