Ασκήσεις 1ης Εβδομάδας

Στα επόμενα συμβολίζουμε με K ένα από τα σώματα αριθμών $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

1. Να γίνουν οι πράξεις:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right],$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Να γίνουν οι πράξεις:
$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Να βρείτε μη μηδενικούς πίνακες $A, B \in M_n(K)$ με την ιδιότητα $A\,B = \mathbf{0}$ για $n = 4, 5, \ldots$.

4. Δίνεται ο πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$
Να υπολογίσετε τον πίνακα A^3.

5. Να υπολογίσετε το πίνακα A^n για $n = 2, 3$, αν A είναι ένας από τους παρακάτω πίνακες:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. **(*)** Δίνονται οι πίνακες $A, B \in M_n(K)$, που ικανοποιούν τις σχέσεις $A^2 = A$ και $B^2 = B$. Να αποδείξετε ότι
$$(A + B)^2 = A + B \;\Leftrightarrow\; A\,B = B\,A = \mathbf{0}.$$

7. Έστω $A, B \in M_n(K)$ δύο άνω (αντίστοιχα κάτω) τριγωνικοί πίνακες. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας AB είναι άνω (αντίστοιχα κάτω) τριγωνικός πίνακας.

8. Να αποδείξετε ότι αν ο πίνακας $A \in M_n(K)$ είναι άνω τριγωνικός πίνακας, τότε ο A^m είναι άνω τριγωνικός πίνακας, για $m \in \mathbb{N}$.

9. Να εξετάσετε ποιές από τις επόμενες προτάσεις, που αναφέρονται σε πίνακες A, B, Γ του $M_n(K)$ είναι σωστές και ποιές είναι λάθος. Στη περίπτωση λάθους να δώσετε αντιπαράδειγμα.

   i) $AB = 0 \Rightarrow A = \mathbf{0}$ ή $B = \mathbf{0}$.

   ii) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

   iii) $(A+B)^2 = (A+B)\ (B+A)$.

   iv) $AB = A\Gamma \Rightarrow B = \Gamma$.

   v) Αν $A^2 + A = I_n \Rightarrow A^{-1} = A + I_n$.

   v) Αν A και B αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε $A+B$ είναι αντιστρέψιμος.

10. **(*)** Έστω ο διαγώνιος πίνακας

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \in M_n(K)$$

   και $A \in M_n(K)$. Να υπολογίσετε τους πίνακες DA και AD.

11. **(*)** Αν $A^2 + 2A - I_n = \mathbf{0}$, να αποδείξετε ότι ο πίνακας $A \in M_n(K)$ είναι αντιστρέψιμος. Όμοια για τον πίνακα $B \in M_n(K)$, αν $2B^3 + 4B^2 - 2B + 3I_n = \mathbf{0}$.