Διάσταση του Krull

Χ. Χαραλάμπους

Α.Π.Θ.
Θεσσαλονίκη

Ιανουάριος, 2017

Ορισμοί

Έστω R (αντιμεταθετικός) δακτύλιος.

Ορισμός

Η διάσταση του Krull συμβολίζεται με $\dim(R)$ και είναι

$$\dim(R) = \sup\{n : \ P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq P_n, \ P_i \in \operatorname{Spec}(R)\}.$$

Έστω M ένα R-module.

Ορισμός

Αν $M = \mathbf{0}$, τότε θέτουμε $\dim(M) = -1$. Αν $M \neq \mathbf{0}$ τότε $\dim(M) = \dim(R/\operatorname{ann}(M))$.

Διάσταση

Παράδειγμα

1. Αν $\mathbb{k}$ είναι σώμα, τότε $\dim(\mathbb{k}) = 0$.
2. Αν $R = \mathbb{k}[x]$, τότε $\dim(R) = 1$.
3. Έστω $R = \mathbb{k}[x,y]$, $I = \langle x^3, x^2y\rangle$ και $M = R/I$. Αφού $I = \langle x^2\rangle \cap \langle x^3, y\rangle$, κάθε πρώτος P του R περιέχει το $I = \mathrm{ann}(M)$, περιέχει επίσης τον ελάχιστο πρώτο $\langle x\rangle$. Άρα $\dim(M) = 1$.

Διάσταση

Παρατήρηση

$$\dim(R) = \sup_{P\in \mathrm{Spec}(R)} \dim(R_P).$$

Απόδειξη.

$$P_0R_P \subsetneqq P_1R_P \subsetneqq \cdots \subsetneqq PR_P$$

αντιστοιχεί σε πρώτη αλυσίδα στον R:

$$P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq P.$$

□

Ορισμός

$$\mathrm{height}(P) := \dim(R_P).$$

Διάσταση

Παρατήρηση

Υπάρχουν δακτύλιοι της Noether με άπειρη διάσταση.

Παράδειγμα (Nagata)

Έστω $R = \mathbb{k}[x_1, x_2, \ldots]$, $P_1 = \langle x_1 \rangle$, $P_2 = \langle x_2, x_3 \rangle$, $P_3 = \langle x_4, x_5, x_6 \rangle$, $\ldots$ και έστω $S = R \setminus \cup P_i$. Τότε ο $T = S^{-1}R$ είναι δακτύλιος της Noether με μέγιστα ιδεώδη τα $P_i T$. Ας κατασκευάσουμε μία αλυσίδα μήκους 3 στον T.

$$0 \subsetneqq x_4 T \subsetneqq \langle x_4, x_5 \rangle T \subsetneqq P_3 T \ .$$

Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να κατασκευάσουμε αλυσίδες μήκους i, για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\dim(T) = \infty.$$

Κύρια Συμπεράσματα

Θεώρημα

Αν $(R, \mathfrak{m})$ *είναι δακτύλιος της Noether, τότε* $\dim(R) < \infty$.

Θεώρημα

Έστω R *δακτύλιος της Noether.*

$$\dim(R[x_1, \ldots, x_n]) = \dim(R) + n.$$

Θεώρημα

Αν $\mathbb{k}$ *είναι σώμα,* R *ακεραία περιοχή, πεπερασμένα παραγόμενη* $\mathbb{k}$*-άλγεβρα με σώμα κλασμάτων* Q*, τότε* $\dim(R)$ *είναι ο βαθμός υπερβατικότητας του* Q *πάνω από το* $\mathbb{k}$*. Επίσης, αν* $P \in \operatorname{Spec}(R)$*, τότε*

$$\operatorname{height}(P) + \dim(R/P) = \dim(R).$$

$\operatorname{height}(Q) + \dim(S/Q)$ δεν είναι πάντα $\dim(S)$.

Παράδειγμα

Έστω $\Bbbk$ σώμα, $R = \Bbbk[x, y, z]$, $I = \langle xy, xz \rangle$, $P = \langle x+1, y, z \rangle$ $(I \subsetneq P)$ και $S = R/I$. Ο δακτύλιος S δεν είναι ακεραία περιοχή. Αφού $I = \langle x \rangle \cap \langle y, z \rangle$ και $\langle x \rangle \subsetneq \langle x, y \rangle \subsetneq \langle x, y, z \rangle$, βλέπουμε ότι $\dim(S) \geq 2$. Επίσης

$$S/\overline{P} \cong R/P \cong \Bbbk \quad \Rightarrow \dim(S/\overline{P}) = 0.$$

Για το ύψος του $\overline{P}$, $\operatorname{height}(\overline{P})$, υπολογίζουμε την $\dim(S_{\overline{P}})$.

$$S_{\overline{P}} = (\Bbbk[x, y, z]/\langle xy, xz \rangle)_{\overline{P}} = (\Bbbk[x, y, z]/\langle y, z \rangle)_{\overline{P}} \Rightarrow \dim S_{\overline{P}} = 1.$$

Άρα

$$\operatorname{height}(\overline{P}) + \dim(S/\overline{P}) \neq \dim(S).$$

Κύρια Θεωρήματα

Θεώρημα (Λήμμα Κανονικοποίησης της Noether)

Έστω $\Bbbk$ *ένα σώμα,* R *μία πεπερασμένα παραγόμενη* $\Bbbk$*-άλγεβρα,* $\dim(R) = n$ *και*

$$P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq P_n,$$

όπου $P_i \in \operatorname{Spec}(R)$. *Υπάρχουν* $z_1, \ldots, z_n \in R$ *αλγεβρικά ανεξάρτητα, έτσι ώστε* $S = \Bbbk[z_1, \ldots, z_n] \subset R$ *να είναι ακέραια επέκταση και*

$$P_i \cap S = \langle z_1, \ldots, z_i \rangle.$$

Κύρια Θεωρήματα

Έστω I ιδεώδες. Αν $I = \langle 0 \rangle$, τότε θέτουμε $v(I) = 0$. Διαφορετικά

$$v(I) = \min\{n : \ I = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle, \ g_i \in R\}.$$

Θεώρημα (Krull's Principal Ideal Theorem)

Έστω ότι ο R είναι δακτύλιος της Noether και $P \in \mathrm{Spec}(R)$, τέτοιο ώστε $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \subset P$ ελαχιστοτικά. Τότε $\mathrm{height}(P) \leq n$. Αντίστροφα, αν $\mathrm{height}(P) = n$, τότε υπάρχει I, τέτοιο ώστε $I \subset P$ ελαχιστοτικά και $v(I) = n$.

Παράδειγμα

Έστω $\mathbb{k}$ σώμα, $R = \mathbb{k}[x,y]/\langle x^2 \rangle$. Τότε $\mathfrak{m} = \overline{\langle x,y \rangle}$ είναι μέγιστο ιδεώδες και ο εγκλεισμός $\bar{y}R \subset \mathfrak{m}$ είναι ελαχιστοτικός (γιατί;). Άρα $\mathrm{height}(\mathfrak{m}) \leq 1$. Αφού $\bar{y}R \in \mathrm{Spec}(R)$ (γιατί;)

$$\mathrm{height}(\mathfrak{m}) = 1.$$

Κύρια Θεωρήματα

Θεώρημα

Αν $(R, \mathfrak{m})$ *είναι δακτύλιος της Noether, τότε*

$$\dim(R) = \min\{v(J) : J \text{ είναι } \mathfrak{m}\text{-πρωταρχικό}\}.$$

Παράδειγμα

Έστω $\Bbbk$ σώμα, $R = \Bbbk[x,y]$, $\mathfrak{m} = \langle x,y \rangle$, $I = \langle x^3, x^2y \rangle$, $T = R_{\mathfrak{m}}/IR_{\mathfrak{m}}$.
Τότε $\operatorname{maxSpec}(T) = \{\overline{\mathfrak{m}}\}$. Το I δεν είναι $\mathfrak{m}$-πρωταρχικό, άρα $\dim(T) > 0$ (γιατί;). Επίσης $\bar{y}T = \overline{\langle x^3, y \rangle}$ είναι $\overline{\mathfrak{m}}$-πρωταρχικό (γιατί;). Άρα $\dim(T) = 1$ (γιατί;).
Μπορείτε να βρείτε μία αλυσίδα πρώτων ιδεωδών του T μήκους 1;

Παραμετρικά ιδεώδη

Ορισμός

Έστω $(R, \mathfrak{m})$ τοπικός δακτύλιος της Noether. Το ιδεώδες I λέγεται **παραμετρικό** αν $v(I) = \dim(R)$ και το I είναι $\mathfrak{m}$-πρωταρχικό.

Παράδειγμα

Έστω $T = \left(\mathbb{k}[x,y]/\langle x^3, x^2y\rangle\right)_{\langle x,y\rangle}$. Το $\bar{y}T$ είναι παραμετρικό ιδεώδες του T.

Παραμετρικά ιδεώδη και διάσταση των R-modules

Έστω $(R, \mathfrak{m})$ τοπικός δακτύλιος της Noether και M ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-module. Το M είναι R-module και ταυτόχρονα $R/\operatorname{ann}(M)$-module.

Πρόταση

Αν το $I/\operatorname{ann}(M)$ είναι παραμετρικό ιδεώδες για τον $R/\operatorname{ann}(M)$, τότε το M/IM έχει σειρά σύνθεσης και είναι R-module της Noether και του Artin.

Πρόταση

$\dim(M)$ *είναι ο ελάχιστος αριθμός d για τον οποίο υπάρχει ένα ιδεώδες I, με $v(I) = d$, τέτοιο ώστε M/IM να έχει πεπερασμένο μήκος.*

Παραμετρικά ιδεώδη και διάσταση των R-modules

Παράδειγμα

Έστω $R = \Bbbk[x,y]_{\langle x,y\rangle}$, $J = \langle x^3, x^2y\rangle$ και $M = R/J$. Αφού $\operatorname{ann}(M) = J$, ο δακτύλιος $R/\operatorname{ann}(M)$ είναι ο δακτύλιος $T = R/J$. Γνωρίζουμε ότι $\dim(T) = \dim(M) = 1$. Το

$$\bar{y}T = \langle x^3, x^2y, y\rangle/J = \langle x^3, y\rangle/J$$

είναι παραμετρικό ιδεώδες για τον T. Το

$$N = M/\langle x^3, y\rangle M = R/\langle x^3, y\rangle$$

έχει σειρά σύνθεσης:

$$0 \subsetneqq \langle x^2, y\rangle/\langle x^3, y\rangle \subsetneqq \langle x, y\rangle/\langle x^3, y\rangle \subsetneqq N.$$

Διάσταση και β.α.α.

Έστω $(R, \mathfrak{m})$ τοπικός δακτύλιος της Noether και M π.π. R-module.

Θεώρημα

Αν $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *είναι μία β.α.α., τότε*

$$\dim(M) \leq max\left(\dim(M'), \dim(M')\right).$$

Αν $a \in R$, τέτοιο ώστε $a \notin Z(M)$, τότε

$$0 \to M \to M \to M/aM \to 0$$

είναι β.α.α.

Πόρισμα

Αν $a \in R$, *τέτοιο ώστε* $a \notin Z(M)$, *τότε*

$$\dim(M/aM) = \dim M - 1.$$

Συναρτήσεις των Hilbert και Hilbert-Samuel

Έστω $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ δακτύλιος της Noether, $M \neq 0$ ένα πεπερασμένα παραγόμενο R-module και I ένα $\mathfrak{m}$-πρωταρχικό ιδεώδες του R. Τότε τα $I^nM/I^{n+1}M$ και M/I^nM έχουν σειρά σύνθεσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός

Η **συνάρτηση του Hilbert** για το I και το M είναι

$$H_{I,M} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad H_{I,M}(n) = l(I^nM/I^{n+1}M).$$

Η **συνάρτηση των Hilbert-Samuel** για το I και το M είναι

$$L_{I,M} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad H_{I,M}(n) = l(M/I^{n+1}M).$$

Όταν $I = \mathfrak{m}$, η $\Bbbk$-διάσταση του module ταυτίζεται με το μήκος της σειράς σύνθεσης.

Παράδειγμα

Παράδειγμα

Έστω $\mathbb{k}$ σώμα, $R = \mathbb{k}[x]_{\langle x \rangle}$, $\mathfrak{m} = \langle x \rangle$ και $M = R/\langle x^2 \rangle$.

$$M/\mathfrak{m}M \cong \mathbb{k}, \mathfrak{m}M/\mathfrak{m}^2M \cong \mathbb{k}x, \mathfrak{m}^2M/\mathfrak{m}^3M = 0, \ldots \Rightarrow$$

$$H_{\mathfrak{m},M}(0) = 1, H_{\mathfrak{m},M}(1) = 1, H_{\mathfrak{m},M}(2) = 0, H_{\mathfrak{m},M}(n) = 0, \ \forall n \geq 2.$$

Επίσης

$$M/\mathfrak{m}M \cong R/\langle x \rangle, \ M/\mathfrak{m}^2M \cong R/\langle x^2 \rangle, \ M/\mathfrak{m}^3M \cong R/\langle x^2 \rangle, \ldots \Rightarrow$$

$$L_{\mathfrak{m},M}(0) = 1, \ L_{\mathfrak{m},M}(1) = 2, \ H_{\mathfrak{m},M}(n) = 2, \forall n \geq 1.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση του Hilbert συμφωνεί με το μηδενικό πολυώνυμο για $n \gg 0$ ενώ η συνάρτηση των Hilbert-Samuel συμφωνεί με το σταθερό πολυώνυμο 2, για $n \gg 0$

Κύριο Θεώρημα

Θεώρημα

Υπάρχουν $p(x), q(x) \in \mathbb{Q}[x]$*, τέτοια ώστε* $p(n) = H_{I,M}(n)$ *και* $q(n) = L_{I,M}(n)$*, για* $n \gg 0$*. Επιπλέον*

$$\dim(M) = \deg(q(x) = 1 + \deg(p_R(x)).$$

Το $p_R(x)$ ονομάζεται **πολυώνυμο του Hilbert** για I και M.

Παράδειγμα

Έστω $\Bbbk$ σώμα, $R = \Bbbk[x,y]_{\langle x,y \rangle}$. Τότε

$$\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \cong_{\Bbbk} \Bbbk\ \bar{x}^n + \Bbbk\ \bar{x}^{n-1}\bar{y} + \cdots + \Bbbk\ \bar{y}^n \Rightarrow H_R(n) = n+1 \Rightarrow p_R(x) = x+1\,.$$

$$\text{Αφού } \dim_{\Bbbk} R/\mathfrak{m}^n = 1 + 2 + \cdots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$

$\Rightarrow q(x) = (x^2 - x)/2.$

Για την απόδειξη του κυρίως Θεωρήματος

Για *να* αποδείξει κανείς το κύριο θεώρημα πρέπει πρώτα *να* αναπτύξει τη θεωρία για τους βαθμωτούς δακτυλίους, *να* ορίσει μία αντίστοιχη συνάρτηση του Hilbert για βαθμωτούς δακτυλίους, *να* αποδείξει ότι η συνάρτηση του Hilbert είναι πολυωνυμική και τέλος *να* αποδείξει ότι συμφωνεί με την αρχική συνάρτηση του Hilbert στον τοπικό δακτύλιο.
Οι διαφάνειες που ακολουθούν σκιαγραφούν το πέρασμα αυτό.

Βαθμωτοί δακτύλιοι και modules

Ορισμός

Ο δακτύλιος $S = \oplus_{n=0}^{\infty} S_n$ λέγεται *βαθμωτός* αν

- S_n είναι υποομάδα του S, για $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ και
- $S_m \cdot S_n \subset S_{m+n}$, για $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Το S-module $M = \oplus_{n=k}^{\infty} M_n$ λέγεται *βαθμωτό* S-module, αν

- M_n είναι υποομάδα του M, για $n \in \mathbb{Z}_{\geq k}$ και
- $S_m \cdot M_n \subset M_{n+m}$, για $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ και $n \geq k$.

Παράδειγμα

$R = \Bbbk[x] = \Bbbk + \Bbbk x + \Bbbk x^2 + \cdots$ είναι βαθμωτός δακτύλιος και

$$M = R/\langle x^3 \rangle = \Bbbk + \Bbbk \ \bar{x} + \Bbbk \bar{x}^2$$

είναι βαθμωτό R-module.

Τοπικοί δακτύλιοι αντιστοιχούν σε βαθμωτούς δακτυλίους

Ορισμός

Έστω $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ δακτύλιος της Noether, $M \neq 0$ ένα πεπ.παραγ. R-module. Ορίζουμε τον δακτύλιο

$$\mathrm{gr}_I(R) = R/I \oplus I/I^2 \oplus \cdots$$

με άθροισμα ανά συντεταγμένη και πολλαπλασιασμό $(a + I^n)(b + I^m) = ab + I^{n+m}$. Η αβελιανή ομάδα

$$\mathrm{gr}_I(M) = M/IM \oplus IM/I^2M \oplus \cdots ,$$

με εξωτερικό πολλαπλασιασμό

$$(a + I^n)(m + I^tM) = am + I^{n+t}M$$

είναι βαθμωτό πεπ.παραγ. $\mathrm{gr}_I(R)$-module.

Προσαρτημένος δακτύλιος του ιδεώδους I

Πρόταση

Έστω I ιδεώδες του R. Αν $I = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$, τότε $\mathrm{gr}_I(R) = R/I[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r]$, *όπου* $\bar{a}_i := a_i + I^2$.

Παράδειγμα

- Αν $R = \Bbbk[x]$, $I = \langle x \rangle$, τότε $R \cong \mathrm{gr}_I(R)$.
- Εστω $R = \Bbbk[x]$, $I = \langle x^3 \rangle$, $R_0 = R/I$. Τότε

$$\mathrm{gr}_I(R) = R_0 \oplus I/I^2 \oplus \cdots \cong R_0[a], \; a := x^3 + I^2.$$

Βαθμωτοί δακτύλιοι της Noether

Θεώρημα

Ο $S = \oplus_{n=0}^{\infty} S_n$ *είναι δακτ. Noether αν και μόνο αν ο* S_0 *είναι δακτ. Noether και* $S = S_0[a_1, \ldots, a_t]$, *με* a_i *ομογενή βαθμού* ≥ 1.
Αν ο S *είναι δακτ. της Noether και το* $M = \oplus_{n=k}^{\infty} M_n$ *είναι πεπ. παραγ.* S*-module, τότε για* $n \geq k$, *το* M_n *είναι* S_0*-module της Noether και του Artin.*

Πόρισμα

Αν $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ είναι δακτ. της Noether, $M \neq 0$ πεπ. παραγ. R-module με $\mathrm{ann}(M) = 0$, και I ένα παραμετρικό ιδεώδες για το M, τότε $l(I^n M / I^{n+1} M) < \infty$.

Απόδειξη.

Ο $\mathrm{gr}_I(R)$ είναι δακτ. της Noether και $\mathrm{gr}_I(M)$ είναι πεπ. παραγ. $\mathrm{gr}_I(R)$-module. $\square$

Έστω S_0 δακτύλιος του Artin και $S = \oplus_{n \geq 0} S_n$ μία πεπερασμένα παραγόμενη βαθμωτή S_0-άλγεβρα. Έστω $M = \oplus_{n=k}^{\infty} M_n$ ένα πεπερασμένα παραγόμενο S-module. Η **συνάρτηση του Hilbert για το** M είναι:

$$H_M : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \;\; H_M(n) = l(M_n).$$

Θεώρημα

Έστω ότι $S = S_0[a_1, \ldots, a_t]$, *όπου* S_0 *δακτ. του Artin και* $\deg(a_i) = 1$. *Έστω ότι* M *πεπ. παραγ.* S*-module. Υπάρχει* $P_M(x) \in \mathbb{Q}[x]$, *τέτοιο ώστε* $\deg P_M(x) < t$ *και* $P_M(n) = H_M(n)$, *για* $n \gg 0$.

Παραδείγματα

Παράδειγμα

1. Έστω $\mathbb{k}$ σώμα. Τότε $H_{\mathbb{k}}(0) = 1$ και $H_{\mathbb{k}}(n) = 0$, για $n > 0$. Άρα $P_{\mathbb{k}}(x) = 0$.
2. Έστω $\mathbb{k}$ σώμα, $R = \mathbb{k}[x]$. Τότε
$$R = \mathbb{k} + \mathbb{k}x + \mathbb{k}x^2 + \cdots \;\Rightarrow\; H_R(n) = 1,\; n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow P_R(x) = 1\,.$$
3. Έστω $\mathbb{k}$ σώμα, $R = \mathbb{k}[x]$ και $M = R/\langle x^3 \rangle$. Τότε
$$M = \mathbb{k} + \mathbb{k}\;\bar{x} + \mathbb{k}\bar{x}^2. \;\Rightarrow\; H_M(n) = 0 \text{ για } n \gg 0 \;\Rightarrow P_M(x) = 0.$$
4. Έστω $\mathbb{k}$ σώμα, $R = \mathbb{k}[x, y]$. Τότε
$$R = \mathbb{k} + (\mathbb{k}x + \mathbb{k}y) + (\mathbb{k}x^2 + \mathbb{k}xy + \mathbb{k}y^2) + \cdots\,,$$
συνεπώς $H_R(n) = n + 1$ (για $n \geq 0$), άρα $P_R(x) = x + 1\,$.

Πίσω στους τοπικούς δακτυλίους

Θεώρημα

Έστω $(R, \mathfrak{m})$ *δακτ. της Noether,* $M \neq 0$ *ένα πεπερασμένο παραγόμενο R-module. Αν* I *είναι ένα ιδεώδες του* R*, τέτοιο ώστε* M/IM *να έχει σειρά σύνθεσης, τότε η συνάρτηση* $H_{I,M}$ *είναι ίση με την* $H_{\mathrm{gr}_I(M)}$.

Πόρισμα

Υπάρχει $P_{I,M}(x) \in \mathbb{Q}[x]$*, τέτοιο ώστε* $P_{I,M}(n) = H_{I,M}(n)$*, για* $n \gg 0$*, και* $\deg P_{I,M}(x) < v(I)$*. Το* $P_{I,M}(n)$ *ονομάζεται* ***πολυώνυμο του Hilbert***.

Έστω ότι R είναι τοπικός δακτύλιος της Noether, $M \neq 0$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-module και I παραμετρικό ιδεώδες του M.

$$0 \to I^n M/I^{n+1}M \to M/I^{n+1}M \to M/I^n M \to 0,$$

Πόρισμα

Υπάρχει $Q_{I,M}(x) \in \mathbb{Q}[x]$, τέτοιο ώστε $Q_{I,M}(n) = L_{I,M}(n)$, για $n \gg 0$, και $\deg Q_{I,M}(x) = 1 + \deg P_{I,M}(x) \leq v(I)$. Ο βαθμός του $Q_{I,M}(x)$ είναι ο ίδιος για όλα τα παραμετρικά ιδεώδη I του M.

Συνάρτηση των Hilbert-Samuel και β.α.α.

Θεώρημα

Αν

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

είναι β.α.α. από πεπ. παραγ. R-modules και I ιδεώδες του R, τέτοιο ώστε $l(M/IM) < \infty$. Τότε υπάρχει $F(x) \in \mathbb{Q}[x]$, τέτοιο ώστε

$$Q_{I,M}(x) = Q_{I,M'}(x) + Q_{I,M''}(x) - F(x),$$

$\deg F(x) < \deg Q_{I,M'}(x)$ *και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $F(x)$ είναι μη αρνητικός. Άρα*

$$\deg Q_{I,M}(x) = \max(\deg Q_{I,M'}(x), Q_{I,M''}(x)).$$

Θεώρημα

$$\dim(M) = \deg Q_{I,M}(x) = 1 + \deg Q_{I,M}(x).$$