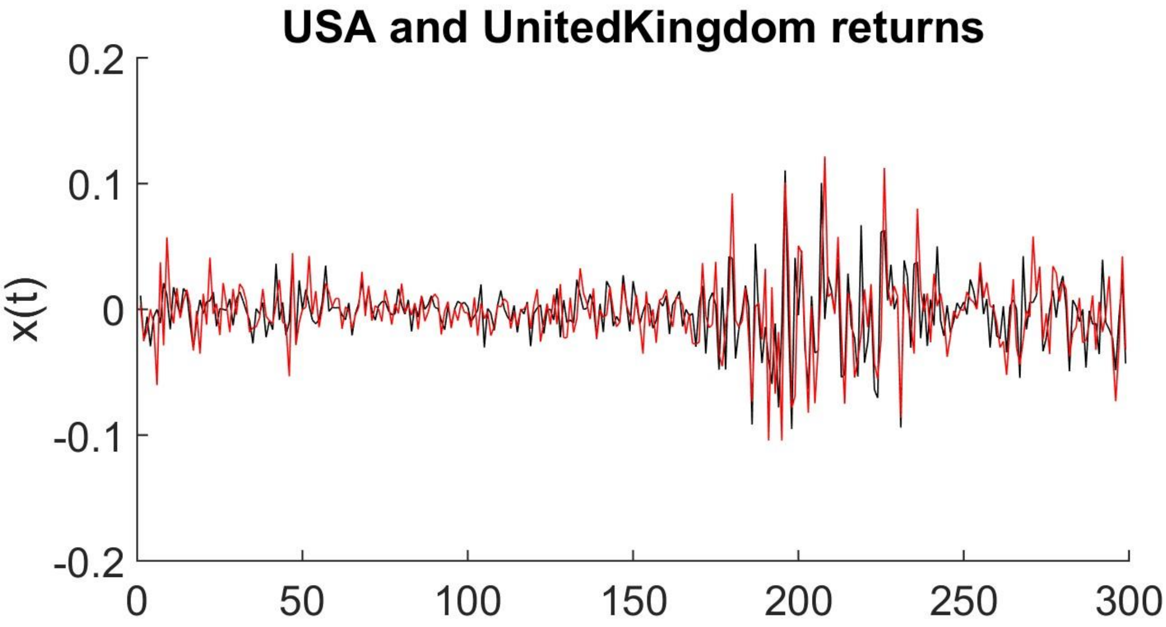
Μάθημα 5-6:

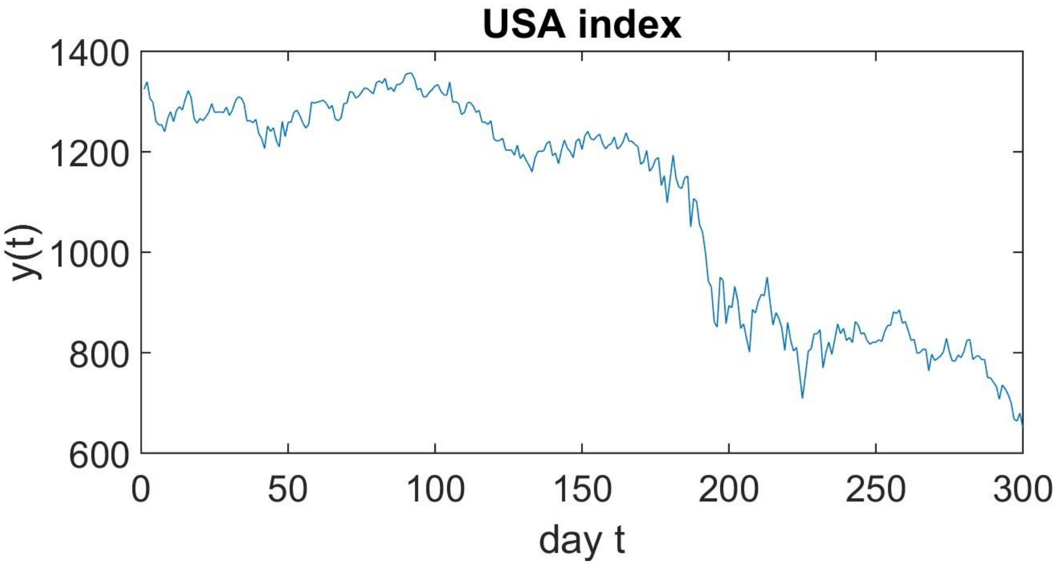
Στάσιμες πολυμεταβλητές χρονοσειρές και μοντέλα

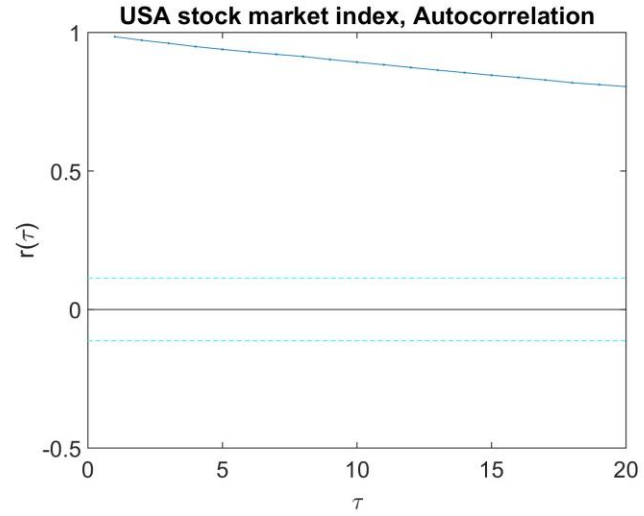
- Διασυσχέτιση
- Διανυσματικά αυτοπαλίνδρομα μοντέλα
- Δίκτυα από πολυμεταβλητές χρονοσειρές
- Αιτιότητα κατά Granger
- Ασκήσεις



Ανάλυση μονομεταβλητής χρονοσειράς

αυτοσυσχέτιση

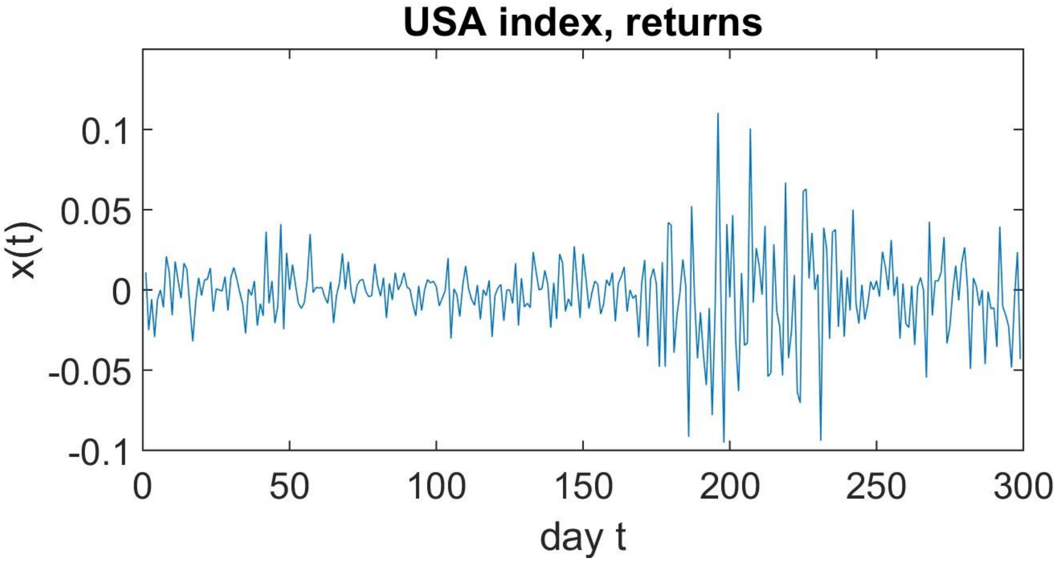


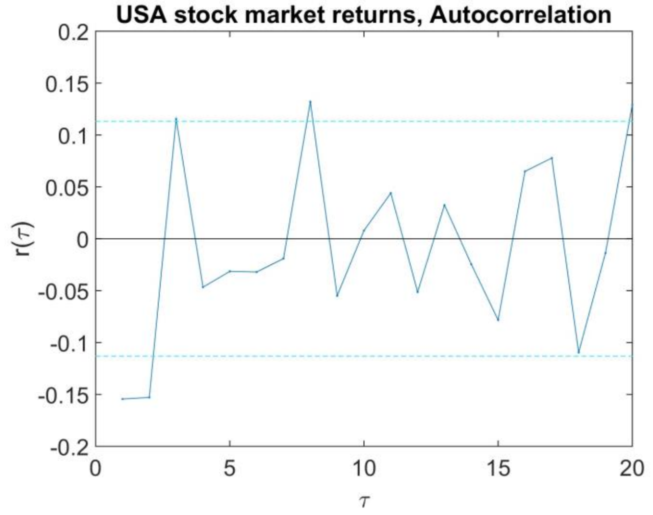


στασιμότητα

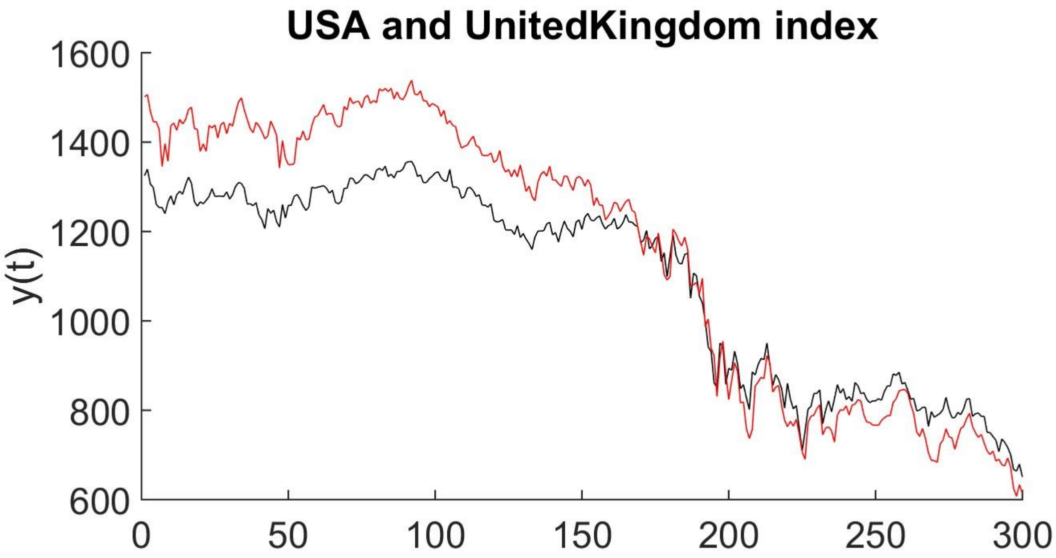
$$x_t = y_t - y_{t-1}$$

$$x_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}$$





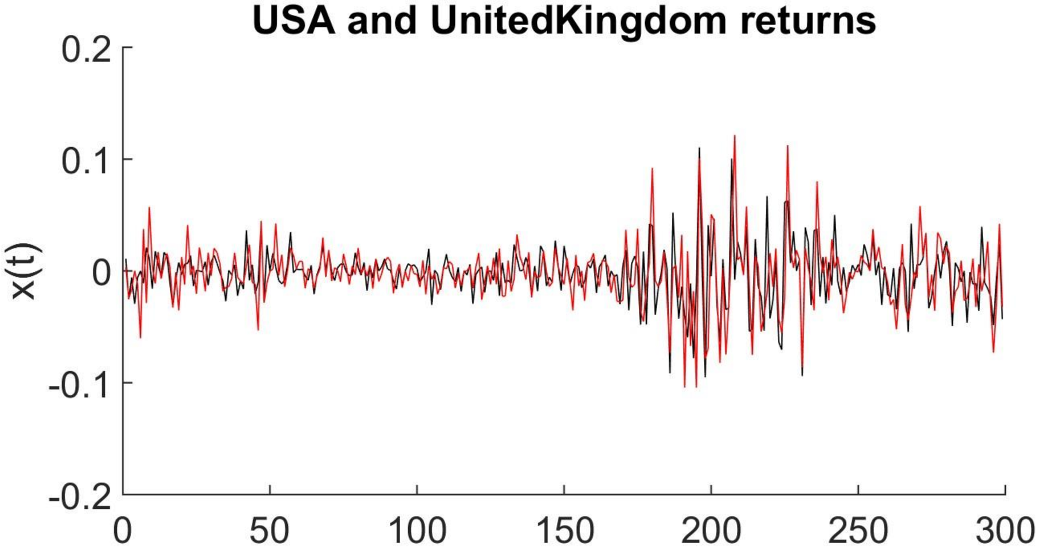
Ανάλυση διμεταβλητής χρονοσειράς



συσχέτιση μεταξύ τους

στασιμότητα

?



Διασυσχέτιση

Δύο στοχαστικές διαδικασίες $\{X_t\},\{Y_t\}$ και οι πραγματοποιήσεις τους δίνει τη διμεταβλητή χρονοσειρά $\{x_t, y_t\}_{t=1}^{n}$

Δια-συνδιασπορά (cross-covariance)

$$\gamma_{XY}(\tau) = \mathrm{Cov}[X_t, Y_{t+\tau}] = \mathrm{E}[(X_t - \mu_X)(Y_t - \mu_Y)]$$

Δειγματική δια-συνδιασπορά

$$c_{XY}(\tau) = \hat{\gamma}_{XY}(\tau) = \frac{1}{n-\tau}\sum_{t=1}^{n-\tau}(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})$$

Διασυσχέτιση (cross-correlation)

$$\rho_{XY}(\tau) = \frac{\gamma_{XY}(\tau)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

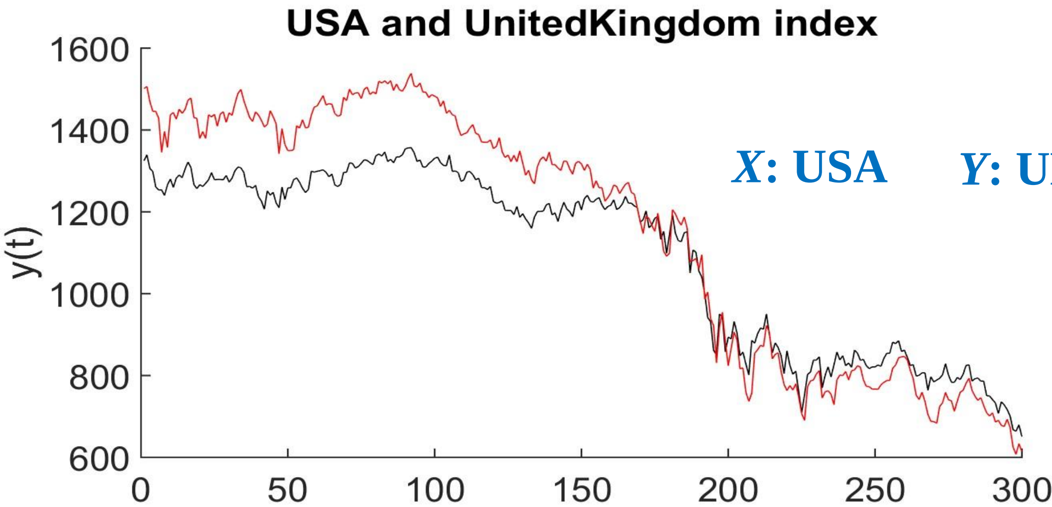
Δειγματική διασυσχέτιση

$$r_{XY}(\tau) = \hat{\rho}_{XY}(\tau) = \frac{c_{XY}(\tau)}{s_X s_Y}$$

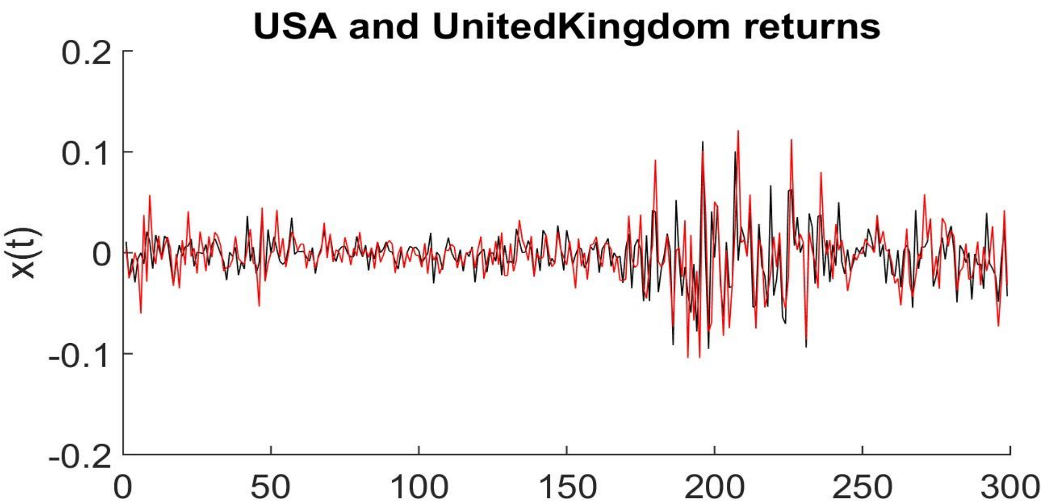
Η δια-συνδιασπορά δεν είναι άρτια συνάρτηση $\gamma_{XY}(\tau) \neq \gamma_{XY}(-\tau)$

αλλά ισχύει $\gamma_{XY}(\tau) = \gamma_{YX}(-\tau)$

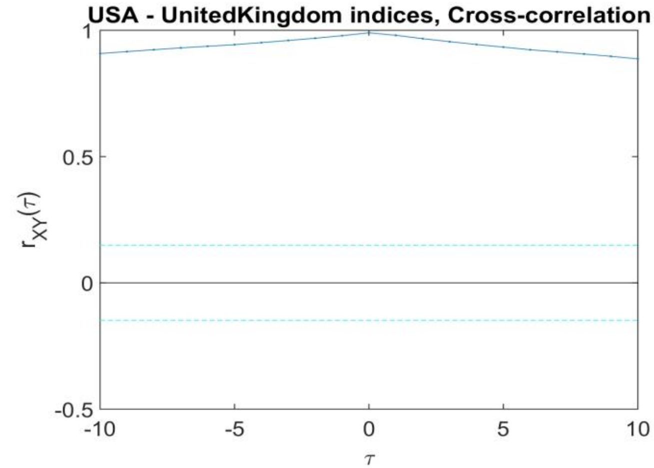
Επίσης ισχύει $|\rho_{XY}(\tau)| \leq 1$

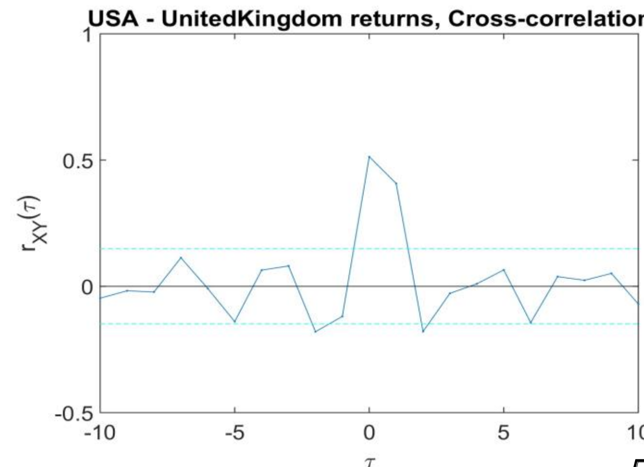


***X*: USA** ***Y*: UK**



διασυσχέτιση



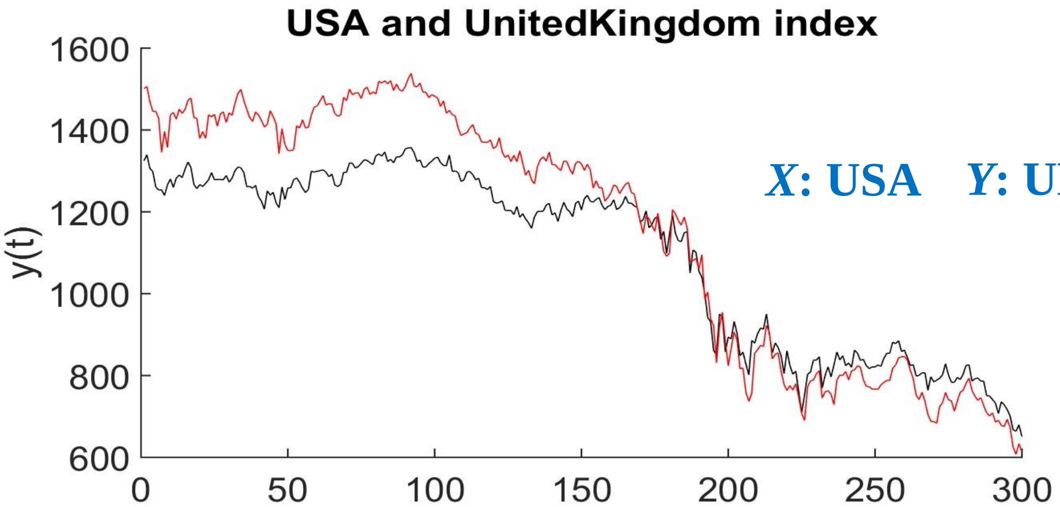


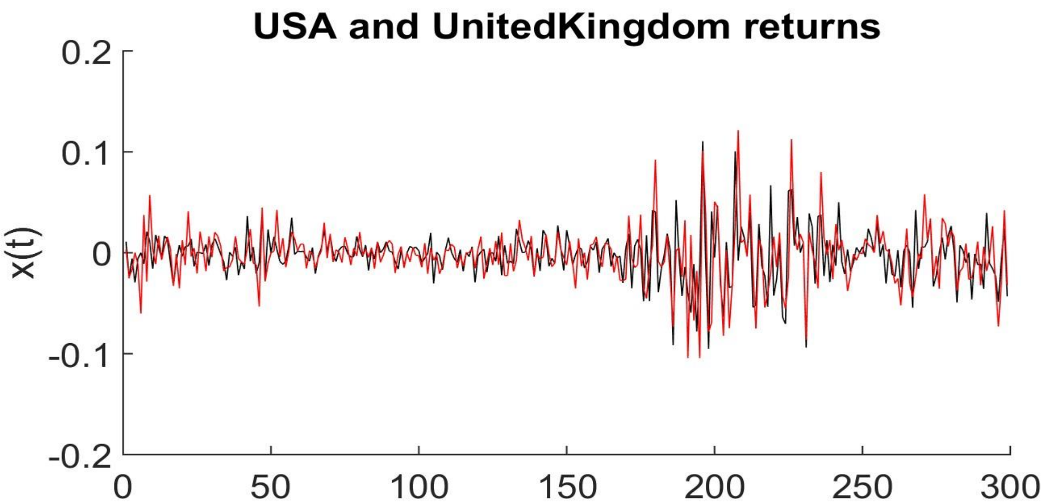
Όρια σημαντικότητας $\pm z_{1-a/2} / \sqrt{n}$

Σημαντική διασυσχέτιση $r_{XY}(0) = \mathrm{Corr}(X_t, Y_t)$: οι USA και UK αποδόσεις είναι συσχετισμένες την ίδια μέρα

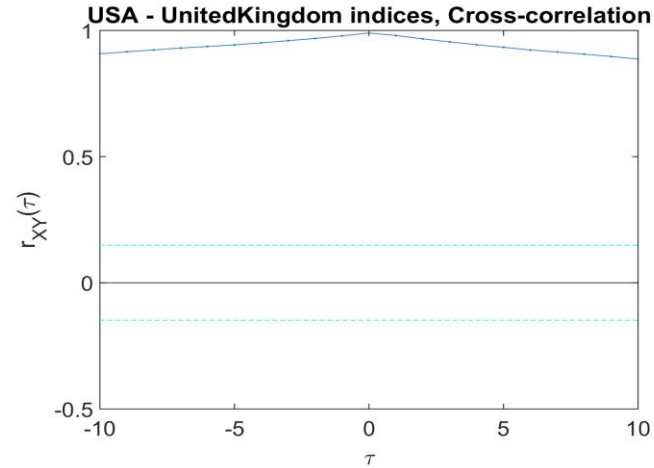
Σημαντική διασυσχέτιση $r_{XY}(1) = \mathrm{Corr}(X_t, Y_{t+1})$: οι USA αποδόσεις είναι συσχετισμένες με τις UK αποδόσεις την επόμενη μέρα

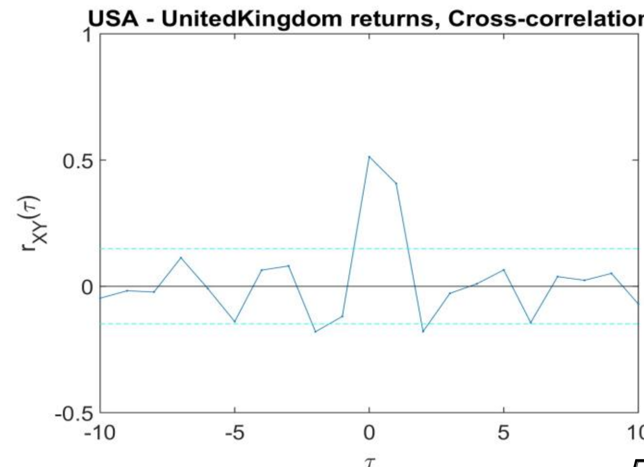
$\Rightarrow$ Οι USA αποδόσεις επιδρούν στις UK αποδόσεις





διασυσχέτιση





Όρια σημαντικότητας $\pm z_{1-a/2} / \sqrt{n}$

Χρονοσειρές δεικτών (με ισχυρή αυτοσυσχέτιση): ισχυρή διασυσχέτιση

Χρονοσειρές αποδόσεων (με ασθενή ή μηδενική αυτοσυσχέτιση): ασθενή διασυσχέτιση

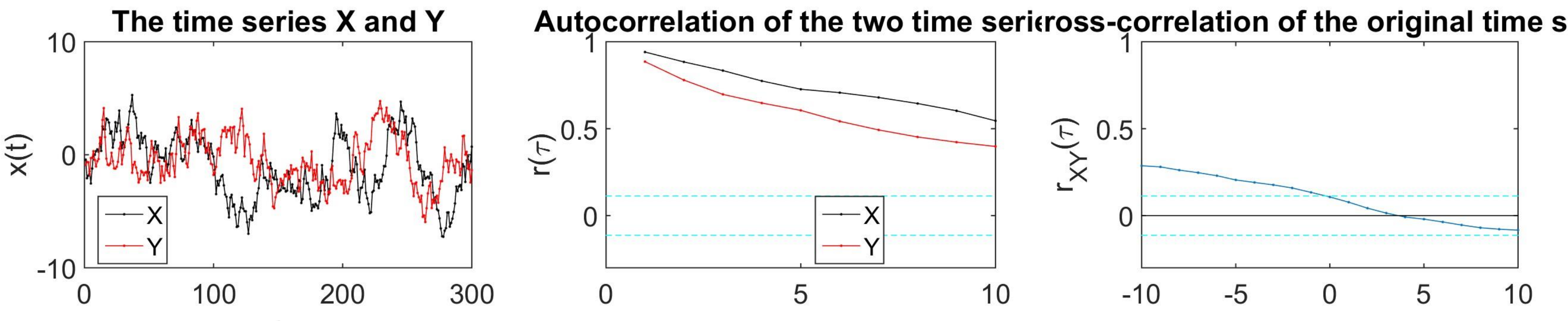
Ισχυρή αυτοσυσχέτιση μπορεί να προκαλέσει ψευδή διασυσχέτιση

προλεύκανση της κάθε μιας χρονοσειράς ώστε να έχει μηδενική αυτοσυσχέτιση

Παράδειγμα 1: Δύο ανεξάρτητες AR(1) διαδικασίες

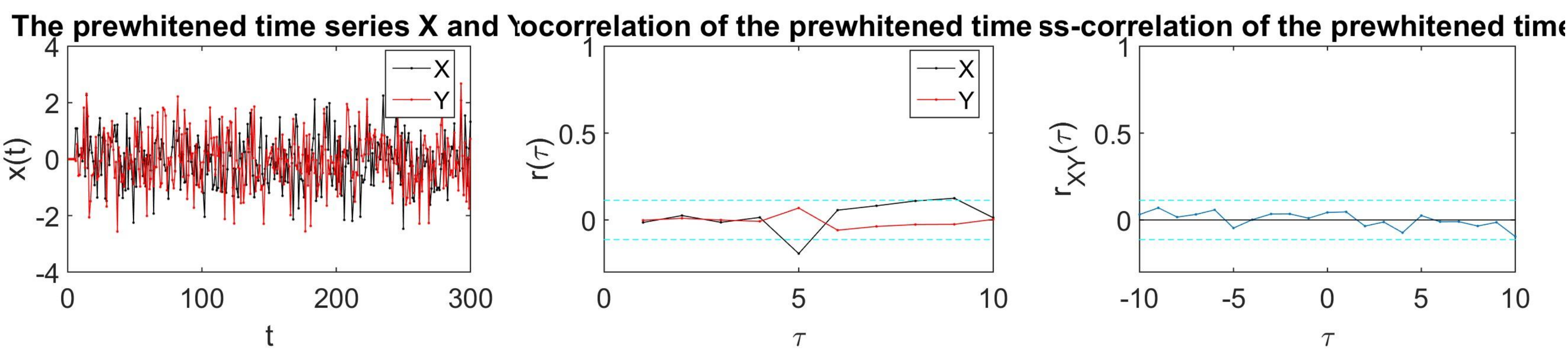
Η διμεταβλητή χρονοσειρά $\{x_t, y_t\}_{t=1}^{n}$ προέρχεται από δύο ανεξάρτητες AR(1) διαδικασίες

$$X_t = 0.95 X_{t-1} + Z_t \qquad Y_t = 0.85 Y_{t-1} + W_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2), \quad W_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_W^2)$$



Προλεύκανση: 1) Προσαρμογή μοντέλου AR(p) στην $\{x_t\}_{t=1}^{n}$ και στην $\{y_t\}_{t=1}^{n}$ ξεχωριστά

2) Χρησιμοποίησε τις χρονοσειρές των υπολοίπων $\{z_t\}_{t=1}^{n}$ και $\{w_t\}_{t=1}^{n}$

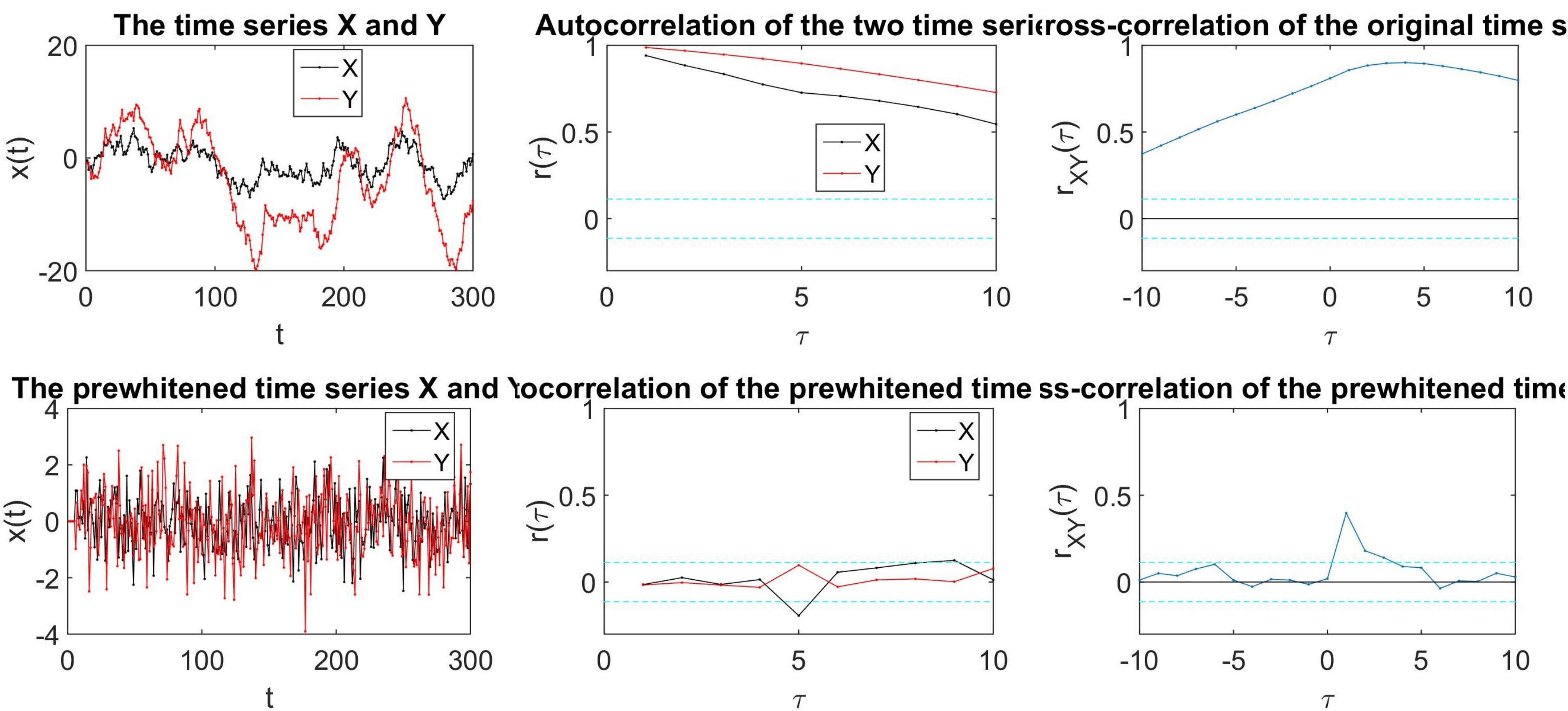


Μετά την προλεύκανση δε φαίνεται να υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διασυσχετίσεις

Παράδειγμα 2: Δύο εξαρτημένες AR(1) διαδικασίες - 1

Η πρώτη AR(1) διαδικασία «οδηγεί» τη δεύτερη AR(1) διαδικασία.

$$X_t = 0.95 X_{t-1} + Z_t \quad Y_t = 0.5 X_{t-1} + 0.85 Y_{t-1} + W_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2), \;\; W_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_W^2)$$



Μετά την προλεύκανση $r_{XY}(\tau), \;\; \tau = 1, 2, 3$ είναι στατιστικά σημαντικά

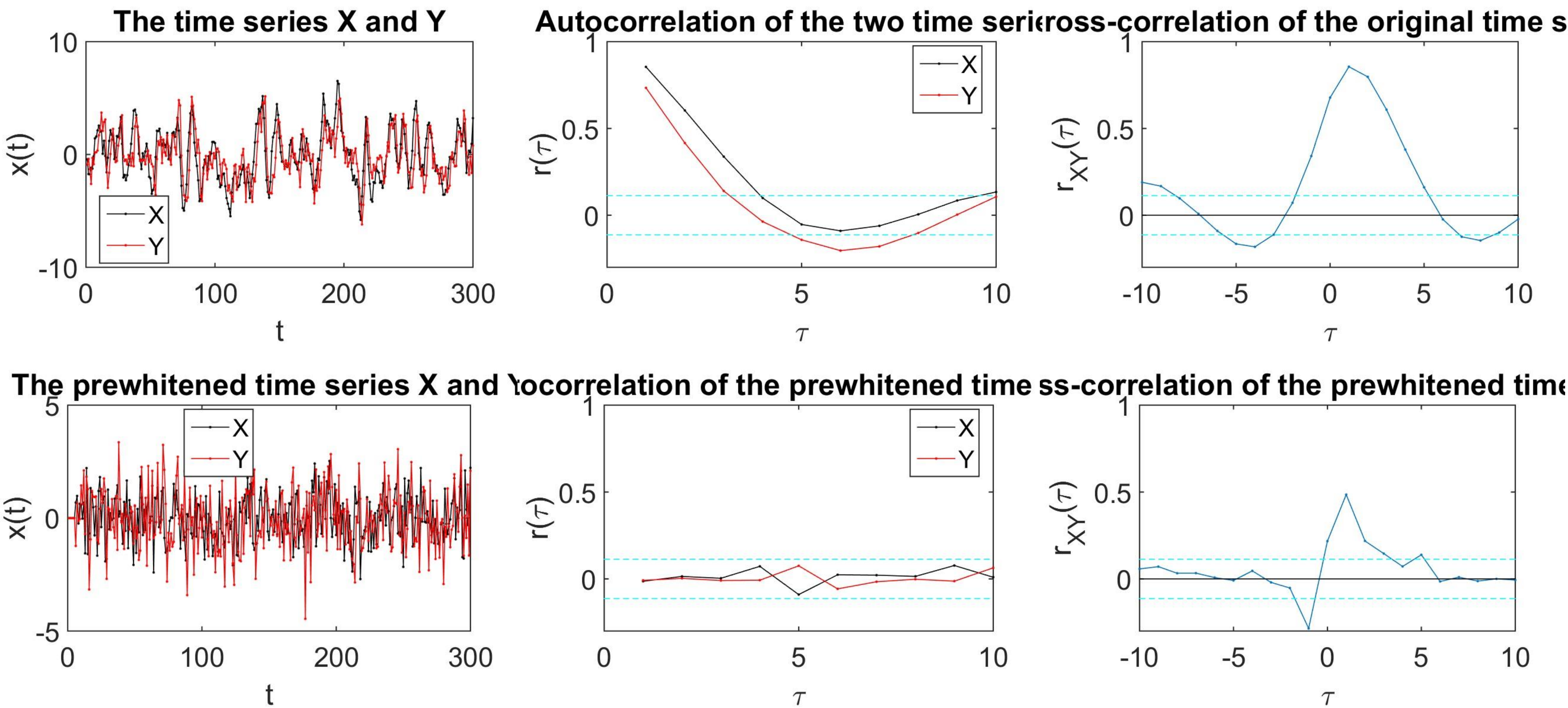
→ το X_t συσχετίζεται με το $Y_{t+\tau}$ (και όχι το αντίθετο)

→ η $\{X_t\}$ επιδρά στην $\{Y_t\}$ (αιτιότητα κατά Granger)

Παράδειγμα 3: Δύο εξαρτημένες AR(1) διαδικασίες - 2

Οι δύο AR(1) διαδικασίες είναι αλληλο-εξαρτημένες.

$$X_t = 1.2X_{t-1} - 0.5Y_{t-1} + Z_t \qquad Y_t = 0.6X_{t-1} + 0.3Y_{t-1} + W_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma_Z^2),\;\; W_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma_W^2)$$



Μετά την προλεύκανση, υπάρχουν στατιστικά σημαντικές αυτοσυσχετίσεις για θετική και αρνητική υστέρηση

→ το X_t συσχετίζεται με το $Y_{t+|\tau|}$ και το $Y_{t-|\tau|}$

→ **Αλληλοεξάρτηση** των $\{X_t\}$ και $\{Y_t\}$

Μοντέλα VAR

Τάξη 1

Για μονομεταβλητή χρονοσειρά, αυτοπαλίνδρομο μοντέλο τάξης 1, AR(1)

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + Z_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

Για διμεταβλητή χρονοσειρά, διανυσματικό αυτοπαλίνδρομο μοντέλο τάξης 1, **VAR(1)**

$$Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

$$X_t = \alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} X_{t-1} + \alpha_{1,2} Y_{t-1} + Z_t$$

$$Y_t = \alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} X_{t-1} + \alpha_{2,2} Y_{t-1} + W_t$$

Σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{2,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} \alpha_{1,0} + \begin{bmatrix} Z_t \\ W_t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_t = A_0 + A_1 \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{Z}_t$$

Η διαδικασία VAR(1) είναι σταθερή (stable) (στάσιμη, stationary) αν οι ιδιοτιμές του A_1 είναι κατά απόλυτη τιμή < 1

Μοντέλα VAR

Τάξη p

Για διμεταβλητή χρονοσειρά, διανυσματικό αυτοπαλίνδρομο μοντέλο τάξης 1, **VAR(*p*)**

$$Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

$$X_t = \alpha_{1,0} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{1,1,i} X_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{1,2,i} Y_{t-t} + Z_t$$

$$Y_t = \alpha_{2,0} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{2,1,i} X_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{2,2,i} Y_{t-t} + Z_t$$

Σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{2,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{1,1,1} & \alpha_{1,2,1} \\ \alpha_{2,1,1} & \alpha_{2,2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \alpha_{1,1,p} & \alpha_{1,2,p} \\ \alpha_{2,1,p} & \alpha_{2,2,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-p} \\ Y_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_t \\ W_t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_t = A_0 + \sum_{i=1}^{p} A_i \mathbf{X}_{t-i} + \mathbf{Z}_t$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{p-1} & A_p \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

Η διαδικασία VAR(p) είναι σταθερή (stable) αν οι ιδιοτιμές του A είναι κατά απόλυτη τιμή < 1

Παράδειγμα 1: Δύο ανεξάρτητες AR(1) διαδικασίες

Η διμεταβλητή χρονοσειρά $\{x_t, y_t\}_{t=1}^{n}$ προέρχεται από δύο ανεξάρτητες AR(1) διαδικασίες

$$X_t = 0.95X_{t-1} + Z_t \qquad Y_t = 0.85Y_{t-1} + W_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma_Z^2), \quad W_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma_W^2)$$

VAR(1) $\quad \mathbf{X}_t = A_0 + A_1\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{Z}_t$

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} \qquad A_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 0.95 & 0 \\ 0 & 0.85 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Z}_t = \begin{bmatrix} Z_t \\ W_t \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2: Δύο εξαρτημένες AR(1) διαδικασίες - 1

$$X_t = 0.95X_{t-1} + Z_t \qquad Y_t = 0.5X_{t-1} + 0.85Y_{t-1} + W_t$$

VAR(1) $\quad \mathbf{X}_t = A_0 + A_1\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{Z}_t$

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} \qquad A_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 0.95 & 0 \\ 0.5 & 0.85 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Z}_t = \begin{bmatrix} Z_t \\ W_t \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3: Δύο εξαρτημένες AR(1) διαδικασίες - 2

$$X_t = 1.2X_{t-1} - 0.5Y_{t-1} + Z_t \qquad Y_t = 0.6X_{t-1} + 0.3Y_{t-1} + W_t$$

VAR(1) $\quad \mathbf{X}_t = A_0 + A_1\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{Z}_t$

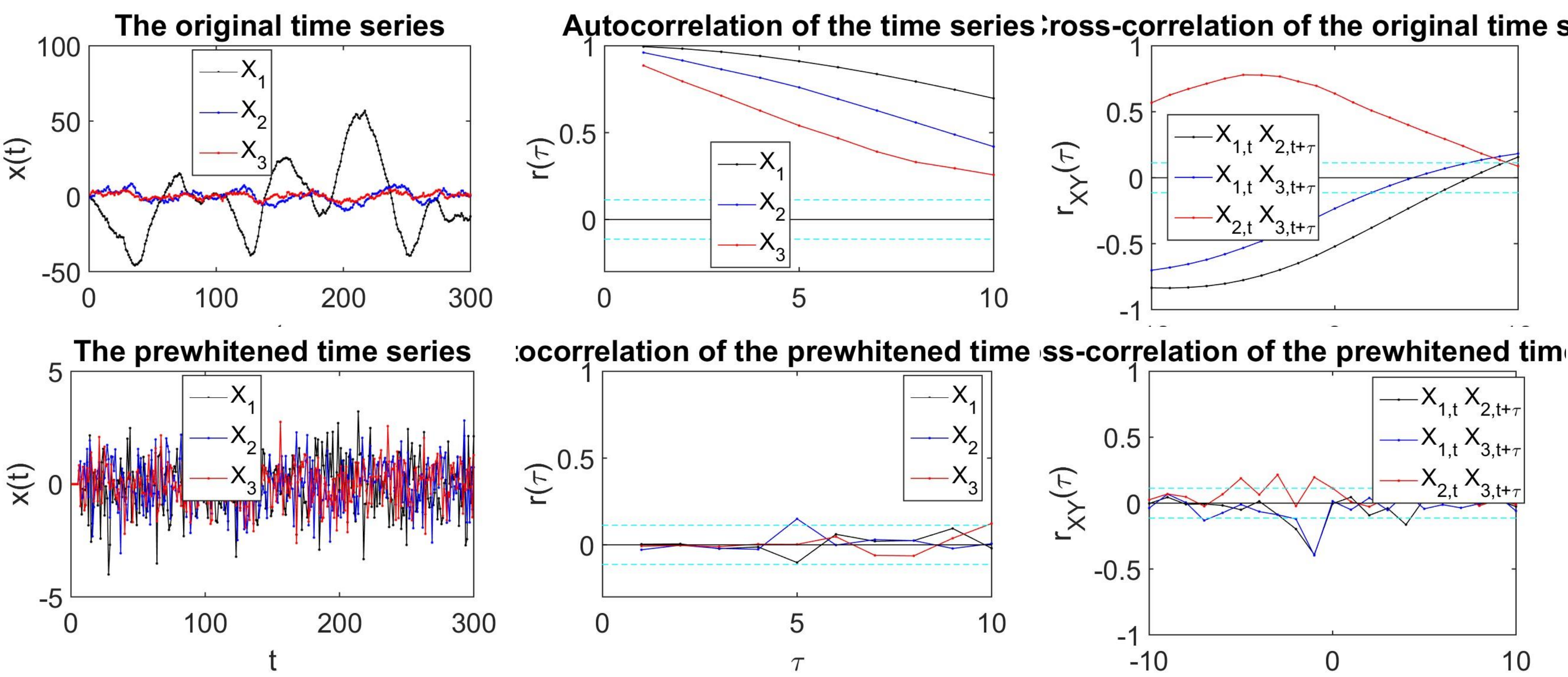
$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} \qquad A_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Z}_t = \begin{bmatrix} Z_t \\ W_t \end{bmatrix}$$

Πολυμεταβλητές χρονοσειρές και δίκτυα

Τα μοντέλα VAR(p) και η διασυσχέτιση επεκτείνονται για K μεταβλητές (πολυμεταβλητή χρονοσειρά K μεταβλητών), συμβολισμός **VAR_K(p)**

Παράδειγμα: $\mathrm{VAR}_3(1)$

$$\begin{bmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ X_{3,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 & -0.5 & -0.3 \\ 0 & 0.85 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \\ X_{3,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \\ Z_{3,t} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ X_{3,t} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_t = A_1 \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{Z}_t$$



Παράδειγμα: VAR$_3$(1)

$$\begin{bmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ X_{3,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 & -0.5 & -0.3 \\ 0 & 0.85 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \\ X_{3,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \\ Z_{3,t} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ X_{3,t} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_t = A_1 \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{Z}_t$$

Πίνακας διασυσχέτισης $R(\tau)$

$$R(0) = \begin{bmatrix} & -0.00 & 0.01 \\ -0.00 & & 0.11 \\ 0.01 & 0.11 & \end{bmatrix}$$

$$R(1) = \begin{bmatrix} & 0.05 & -0.05 \\ -0.39 & & 0.01 \\ -0.40 & 0.20 & \end{bmatrix}$$

$$R(2) = \begin{bmatrix} & -0.09 & 0.04 \\ -0.20 & & -0.03 \\ -0.12 & -0.02 & \end{bmatrix}$$

Κατώφλι σημαντικότητας

1. Αυθαίρετο κατώφλι

2. Στατιστική σημαντικότητα $\pm 2/\sqrt{n}$

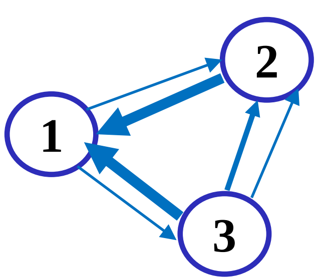
Πίνακας γειτνίασης $A(\tau)$

$$A(0) = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$A(1) = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 1 & & \\ 1 & 1 & \end{bmatrix}$$

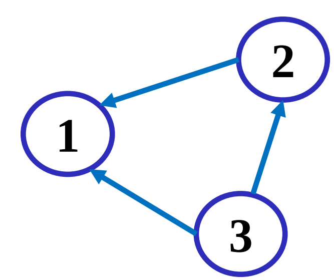
$$A(2) = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ 1 & & \\ 1 & 0 & \end{bmatrix}$$

Δίκτυο
(για διασυσχέτιση υστέρησης 1)



σταθμισμένες συνδέσεις
π.χ. στάθμιση $|r_{ij}(1)|$

απλές συνδέσεις

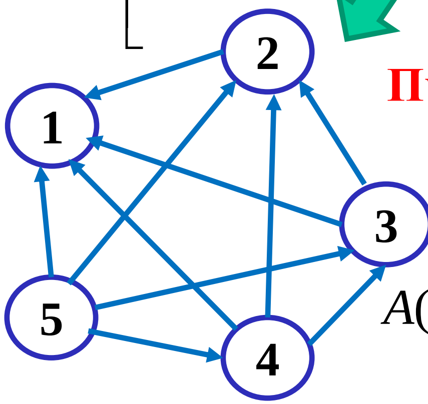


Παράδειγμα: VAR$_5$(1)

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} X_{1,t} & X_{2,t} & X_{3,t} & X_{4,t} & X_{5,t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_t = A_1 \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{Z}_t$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.95 & 0.2 & -0.3 & 0.4 & -0.8 \\ & -0.2 & -0.3 & -0.4 & 0.9 \\ & & -0.1 & -0.1 & 0.8 \\ & & & -0.8 & -0.9 \\ & & & & 0.8 \end{bmatrix}$$



Πίνακας διασυσχέτισης $R(\tau)$

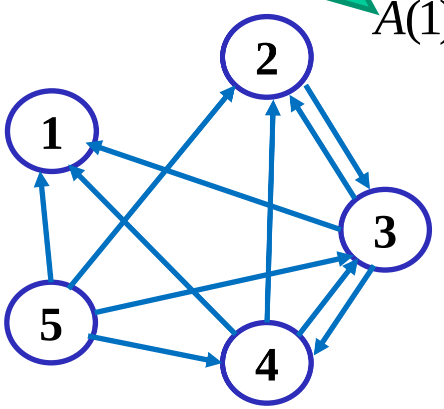
$$R(0) = \begin{bmatrix} & -0.62 & -0.47 & 0.40 & 0.07 \\ -0.62 & & 0.58 & -0.36 & 0.05 \\ -0.47 & 0.58 & & -0.42 & 0.04 \\ 0.40 & -0.36 & -0.42 & & -0.04 \\ 0.07 & 0.05 & 0.04 & -0.04 & \end{bmatrix}$$

Πίνακας γειτνίασης $A(\tau)$

$$A(0) = \begin{bmatrix} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$R(1) = \begin{bmatrix} & -0.01 & 0.03 & -0.04 & 0.02 \\ 0.04 & & -0.12 & 0.09 & 0.02 \\ 0.29 & -0.12 & & 0.20 & 0.02 \\ -0.53 & 0.48 & 0.26 & & 0.06 \\ 0.49 & -0.53 & -0.62 & 0.65 & \end{bmatrix}$$

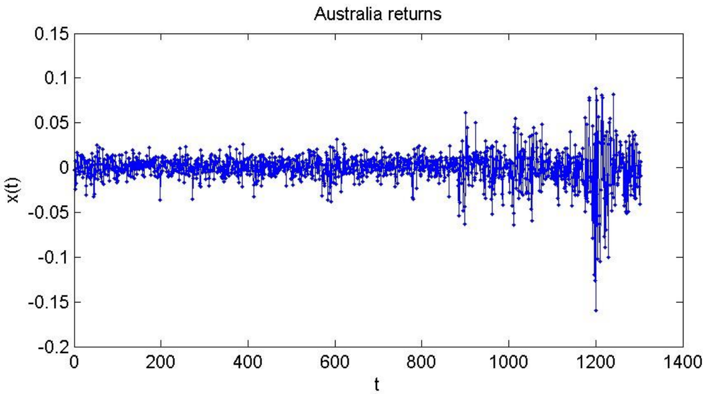
$$A(1) = \begin{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \end{bmatrix}$$



Παράδειγμα: Αποδόσεις 4 χρηματαγορών χωρών

αποδόσεις $\quad x_t = \log(y_t) - \log(y_{t-1})$

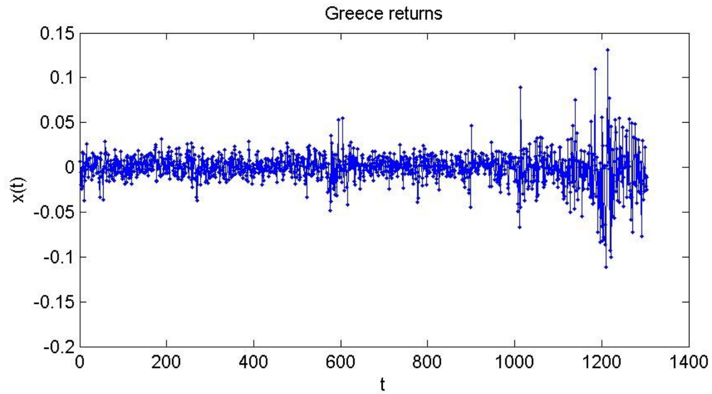
X: AUS $\qquad$ Y: GRE

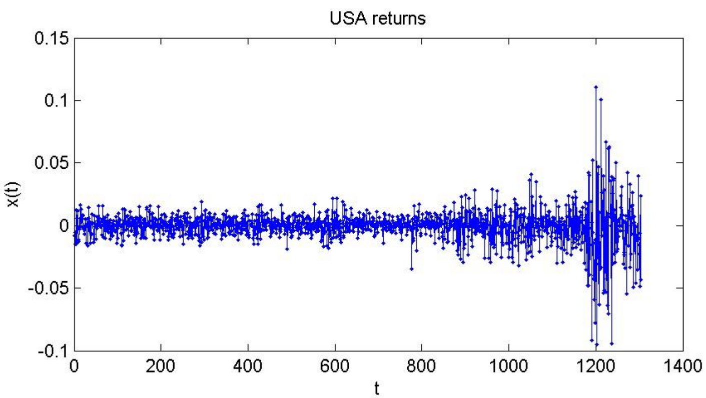


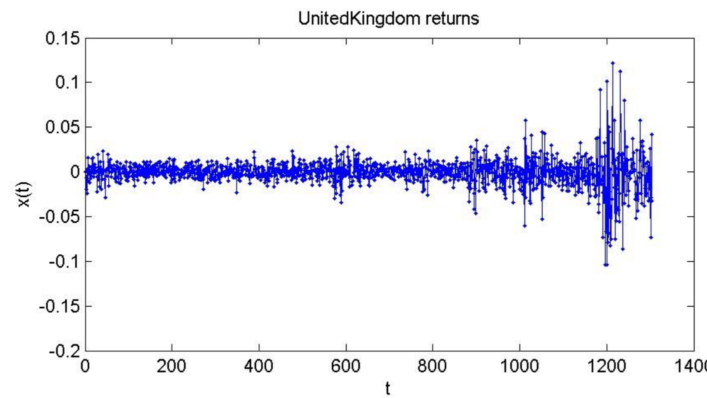
$r_{XY}(0) = 0.58$

$r_{XY}(1) = 0.02$

$r_{XY}(-1) = 0.19$







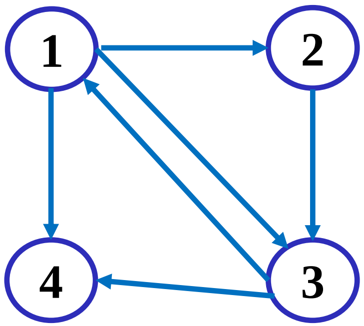
Παράδειγμα: Αποδόσεις 4 χρηματαγορών χωρών

Πίνακας διασυσχέτισης για υστέρηση 1, $R(1)$

$$R(1)=\begin{bmatrix} & 0.382 & 0.333 & 0.596 \\ 0.049 & & 0.039 & 0.303 \\ 0.096 & 0.001 & & 0.190 \\ 0.031 & -0.001 & -0.021 & \end{bmatrix}$$

Πίνακας γειτνίασης $A(1)$

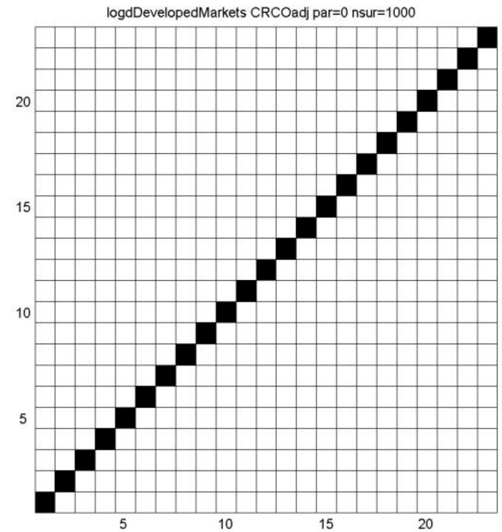
$$A(1)=\begin{bmatrix} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$



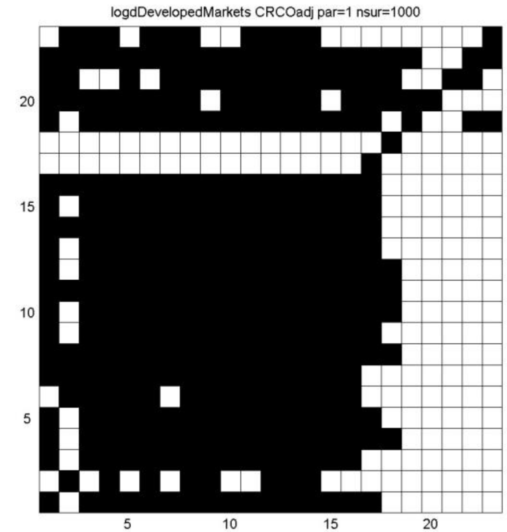
Παράδειγμα: Αποδόσεις 23 χρηματαγορών χωρών

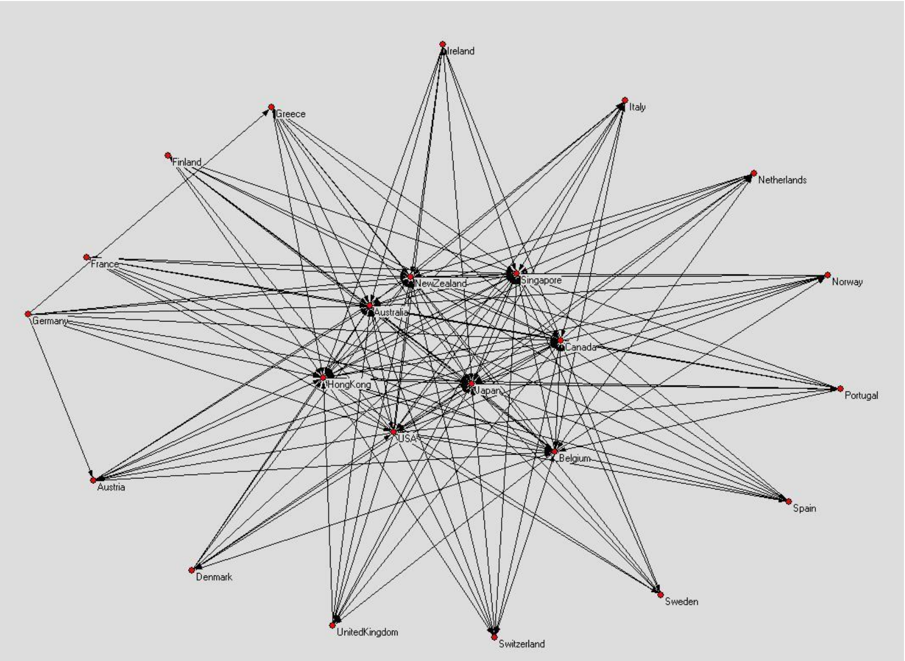
index	*market*
1	Austria
2	Belgium
3	Denmark
4	Finland
5	France
6	Germany
7	Greece
8	Ireland
9	Italy
10	Netherlands
11	Norway
12	Portugal
13	Spain
14	Sweden
15	Switzerland
16	UnitedKingdom
17	USA
18	Canada
19	Australia
20	HongKong
21	Japan
22	NewZealand
23	Singapore

Πίνακας γειτνίασης $A(0)$



Πίνακας γειτνίασης $A(1)$



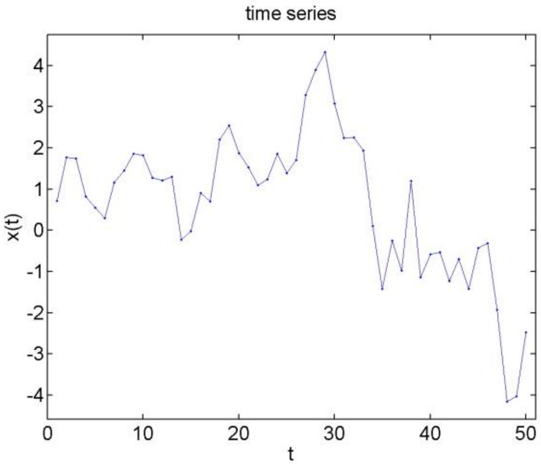


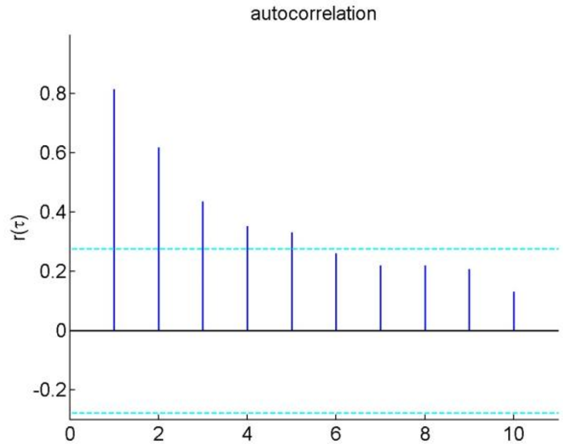
δίκτυο διασυσχέτισης
23 κόμβοι
κατευθυνόμενες συνδέσεις από

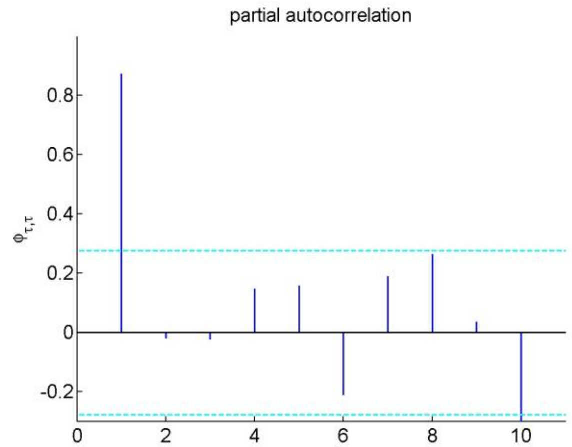
$$|r_{ij}(1)|$$

Μερική διασυσχέτιση

Μονομεταβλητή χρονοσειρά





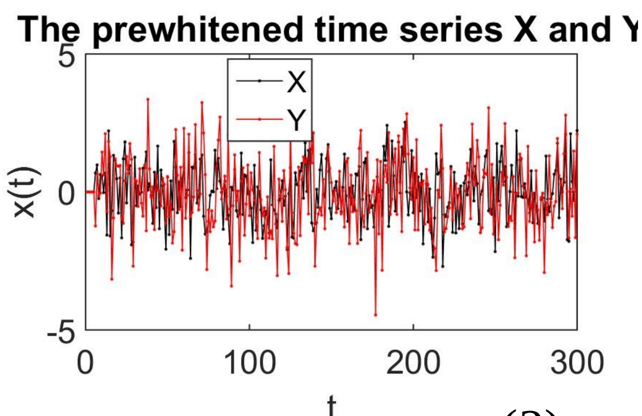


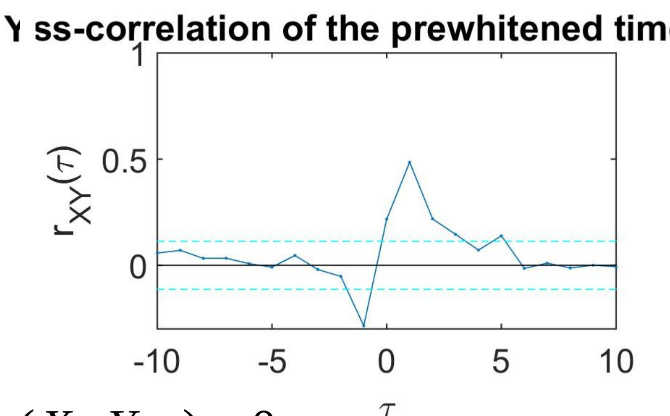
Είναι τα X_t και X_{t+1} (γραμμικά) συσχετισμένα? $r_1 = r_X(1) = r(X_t, X_{t+1}) \neq 0$

Είναι τα X_t και X_{t+2} (γραμμικά) συσχετισμένα? $r_2 = r_X(2) = r(X_t, X_{t+2}) \neq 0$

Είναι τα X_t και X_{t+2} άμεσα (γραμμικά) συσχετισμένα? $\phi_{2,2} = r(X_t, X_{t+2} \mid X_{t+1}) \neq 0$

Διμεταβλητή χρονοσειρά





Είναι τα X_t και Y_{t+2} (γραμμικά) συσχετισμένα? $r_{XY}(2) = r(X_t, Y_{t+2}) \neq 0$

Είναι τα X_t και Y_{t+2} άμεσα (γραμμικά) συσχετισμένα? $r(X_t, Y_{t+2} \mid ?)$

? **Λύση με χρήση μοντέλου**

Αιτιότητα κατά Granger (Granger causality)

Η ιδέα της αιτιότητα κατά Granger $X \rightarrow Y$

Υπάρχει αιτιότητα κατά Granger $X \rightarrow Y$ όταν η πρόβλεψη της Y βελτιώνεται όταν το μοντέλο παλινδρόμησης περιλαμβάνει και την X

Διμεταβλητή χρονοσειρά $\{x_t, y_t\}_{t=1}^{n}$

μεταβλητή οδηγός (driving variable): X μεταβλητή απόκρισης (response variable): Y

Μοντέλο 1, περιορισμένο μοντέλο (restricted model, R-model) δεν περιέχει τη X

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i} + e_{R,t} \qquad \{e_{R,t}\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_R^2)$$

Μοντέλο 2, μη-περιορισμένο μοντέλο (unrestricted model, U-model) περιέχει τη X

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} b_i x_{t-i} + e_{U,t} \qquad \{e_{U,t}\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_U^2)$$

Δείκτης αιτιότητας κατά Granger (Granger causality index, GCI) $X \rightarrow Y$

$$\mathrm{GCI}_{X \to Y} = \ln \frac{s_R^2}{s_U^2} = \ln \frac{\mathrm{Var}(\hat{e}_{R,t})}{\mathrm{Var}(\hat{e}_{U,t})}$$

$\mathrm{GCI}_{X \to Y} > 0 \Rightarrow X \to Y$ υπάρχει αιτιότητα κατά Granger από X στο Y

$\mathrm{GCI}_{X \to Y} = 0 \Rightarrow X \not\to Y$ δεν υπάρχει αιτιότητα κατά Granger από X στο Y

Έλεγχος σημαντικότητας του δείκτη αιτιότητας κατά Granger

$\mathrm{GCI}_{X \to Y} > 0$? **Έλεγχος σημαντικότητας**

Αν δεν υπάρχει αιτιότητα κατά Granger από X στο Y τότε η συνεισφορά της X στο μη-περιορισμένο θα πρέπει να μην είναι σημαντική

Άρα οι όροι της X στο U-μοντέλο θα πρέπει να μην είναι στατιστικά σημαντικοί

H_0: $b_i = 0, \; i = 1, \ldots, p$

H_1: $b_i \neq 0$ για κάποιο $i = 1, \ldots, p$

Στατιστικό ελέγχου (έλεγχος Snedecor-Fisher, F-test):

$$F = \frac{(\mathrm{SSE}^R - \mathrm{SSE}^U)/p}{\mathrm{SSE}^U/\mathrm{ndf}}$$

SSE (sum of squared errors): άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων

ndf (number of degrees of freedom): αριθμός βαθμών ελευθερίας

$$\mathrm{ndf} = (n-p) - 2p$$

αριθμός εξισώσεων αριθμός συντελεστών

Πολυμεταβλητή χρονοσειρά $\{x_t, y_t, z_{1,t}, z_{2,t}, \ldots, z_{K-2,t}\}_{t=1}^{n}$ K μεταβλητές

μεταβλητή οδηγός (driving variable): X μεταβλητή απόκρισης (response variable): Y

υπόλοιπες παρατηρούμενες μεταβλητές (confounding variables): Z $Z = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_{K-2}\}$

Μοντέλο 1, περιοριſμένο μοντέλο (restricted model, R-model) δεν περιέχει τη X

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} A_i \mathbf{z}_{t-i} + e_{R,t} \qquad \{e_{R,t}\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_R^2)$$

Μοντέλο 2, μη-περιορισμένο μοντέλο (unrestricted model, U-model) περιέχει τη X

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} A_i \mathbf{z}_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} b_i x_{t-i} + e_{U,t} \qquad \{e_{U,t}\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_U^2)$$

Δείκτης αιτιότητας κατά Granger με δέσμευση
(Conditional Granger causality index, CGCI) $X \rightarrow Y \mid Z$

$$\mathrm{CGCI}_{X \to Y|Z} = \ln \frac{s_R^2}{s_U^2} = \ln \frac{\mathrm{Var}(\hat{e}_{R,t})}{\mathrm{Var}(\hat{e}_{U,t})}$$

Έλεγχος σημαντικότητας του δείκτη CGCI

$\mathrm{CGCI}_{X \to Y|Z} > 0$? **Έλεγχος σημαντικότητας**

$\mathrm{H}_0\text{:}\ \ b_i = 0,\ \ i = 1, \ldots, p$

$\mathrm{H}_1\text{:}\ \ b_i \neq 0$ για κάποιο $i = 1, \ldots, p$

Στατιστικό ελέγχου (έλεγχος Snedecor-Fisher, F-test):

$$F = \frac{(\mathrm{SSE}^R - \mathrm{SSE}^U)\,/\,p}{\mathrm{SSE}^U\ /\ \mathrm{ndf}}$$

SSE (sum of squared errors): άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων

ndf (number of degrees of freedom): αριθμός βαθμών ελευθερίας

$$\mathrm{ndf} = (n - p) - Kp$$

αριθμός εξισώσεων   αριθμός συντελεστών