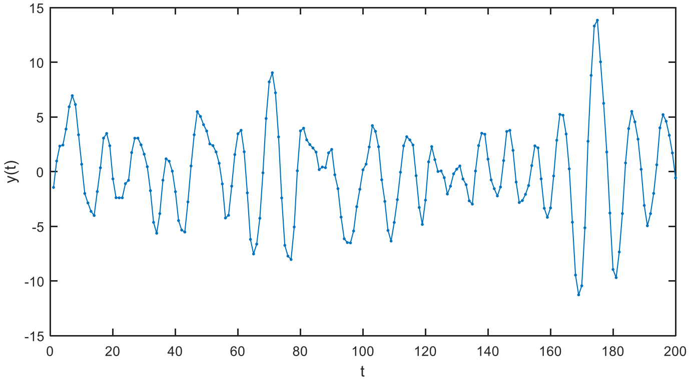
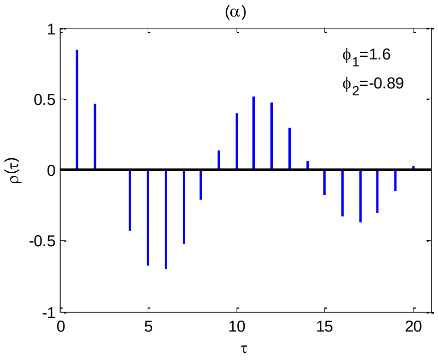
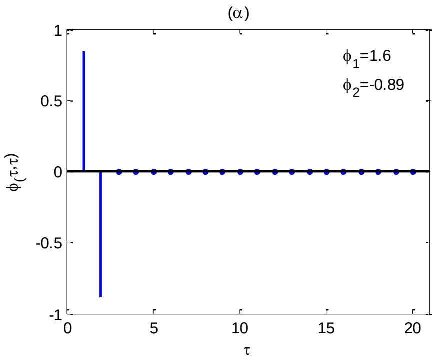
Μάθημα 3:
Γραμμικές στοχαστικές διαδικασίες και μοντέλα

- Γραμμικές στοχαστικές διαδικασίες, στασιμότητα και αντιστρεψιμότητα
- Εκτίμηση παραμέτρων και προσδιορισμός τάξης σε αυτοπαλίνδρομα μοντέλα (AR), μοντέλα κινούμενου μέσου (MA) και μικτά μοντέλα (ARMA).
- Μοντέλα ARIMA για μη-στάσιμες χρονοσειρές
- Ασκήσεις







Γραμμικές στάσιμες διαδικασίες

Αυτοπαλινδρομούμενες διαδικασίες

Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης p, AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

τελεστής υστέρησης

$$BX_t = X_{t-1}$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p) X_t = Z_t \qquad \phi(B) X_t = Z_t$$

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p \qquad \varphi(B) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i B^i$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Συνθήκη στασιμότητας

Ρίζες του $\phi(\lambda) = 0$ να είναι έξω από το μοναδιαίο κύκλο

ή

Ρίζες του $\lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \ldots - \phi_{p-1} \lambda - \phi_p = 0$ να είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου

Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης 1, AR(1)

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

Συνθήκη στασιμότητας:

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t \Leftrightarrow (1-\phi B) X_t = Z_t$$

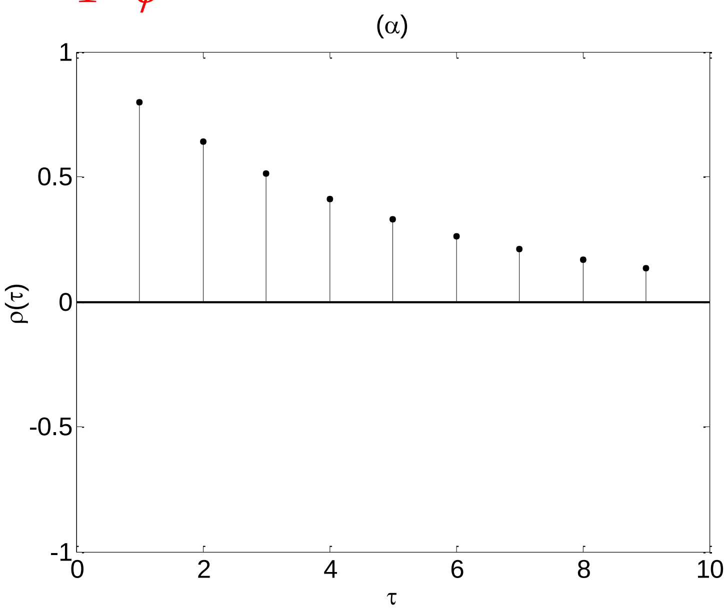
ρίζα χαρακτηριστικού πολυωνύμου $1-\phi B = 0$ εκτός του μοναδιαίου κύκλου $\Rightarrow$ $|\phi|<1$

Διασπορά

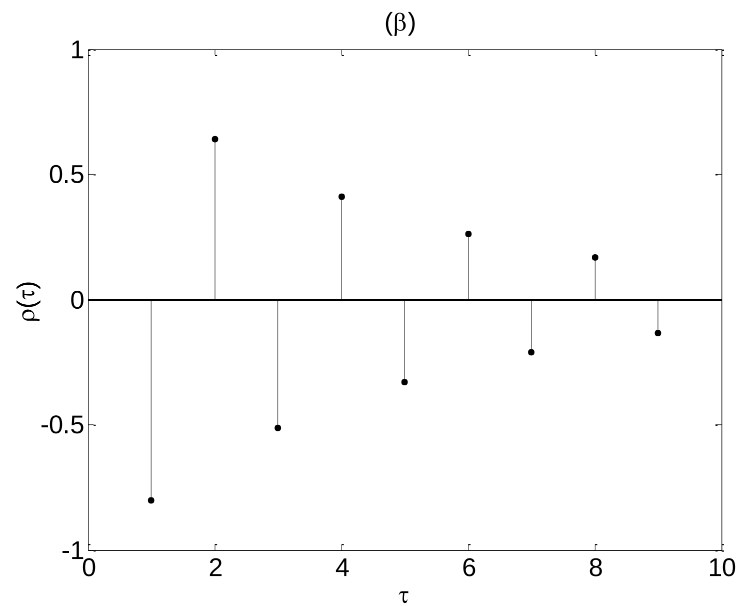
$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_Z^2}{1-\phi^2}$$

Αυτοσυσχέτιση

$$\rho_X(1) = \phi \qquad \rho_X(\tau) = \phi^\tau$$



$\phi = 0.8$



$\phi = -0.8$

Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης 2, AR(2)

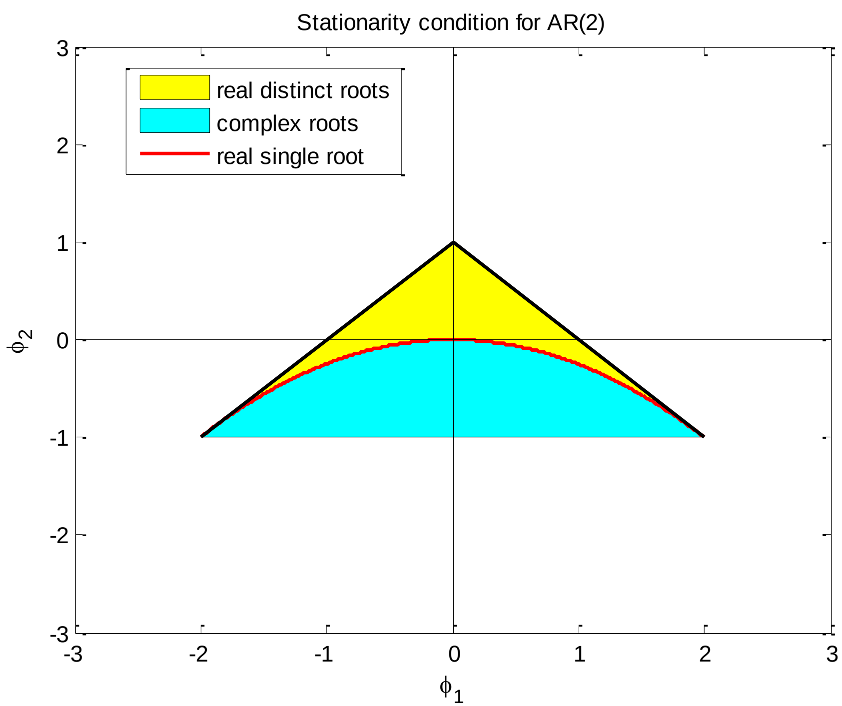
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

Συνθήκη στασιμότητας

Ρίζες του $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$ να είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου

ή εναλλακτικά οι ρίζες του $\lambda^2 - \phi_1\lambda - \phi_2 = 0$ να είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου

Ρίζες: $B_{1,2} = \dfrac{-\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$ $\qquad |B_{1,2}| > 1 \Rightarrow \begin{cases} \phi_2 + \phi_1 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \\ -1 < \phi_2 < 1 \end{cases}$



δύο πραγματικές ρίζες:

$$\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$$

μία διπλή πραγματική ρίζα:

$$\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0$$

συζυγείς μιγαδικές ρίζες:

$$\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$$

Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης 2, AR(2)

Αυτοσυσχέτιση

$$\boxed{\begin{aligned}\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2\end{aligned}}$$

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \qquad \phi_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}$$

$$\rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} \qquad \phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

Για υστέρηση τ:

$$\rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \phi_2 \rho_{\tau-2} \qquad (1-\phi_1 B - \phi_2 B^2)\rho_\tau = 0$$

ρ_τ μπορεί να υπολογιστεί επαναληπτικά

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

πραγματικές ρίζες: εκθετική πτώση

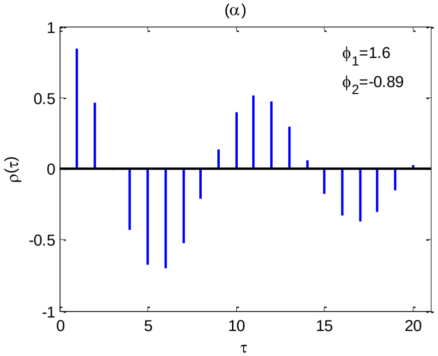
μιγαδικές ρίζες: φθίνουσα ημιτονοειδή συνάρτηση

Διασπορά

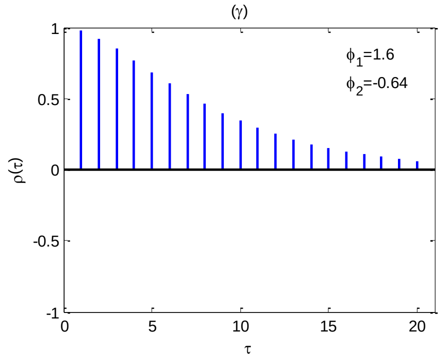
$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_Z^2}{1-\phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2}$$

Αυτοσυσχέτιση

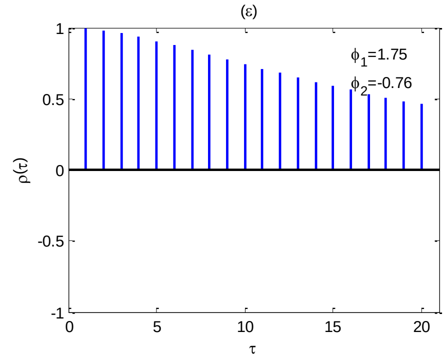
(α) $\lambda_1=0.8+0.5i$
$\lambda_2=0.8-0.5i$



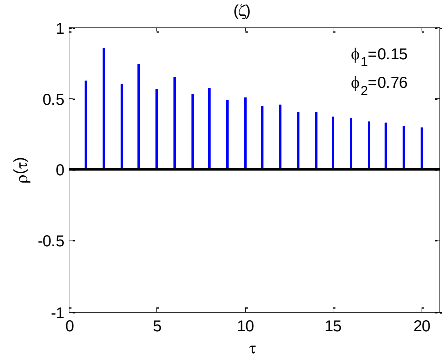
(γ) $\lambda_1=0.8$
$\lambda_2=0.8$



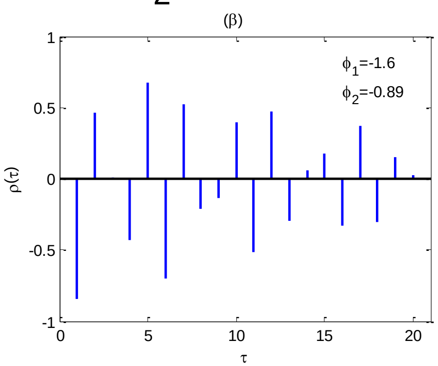
(ε) $\lambda_1=0.8$
$\lambda_2=0.95$



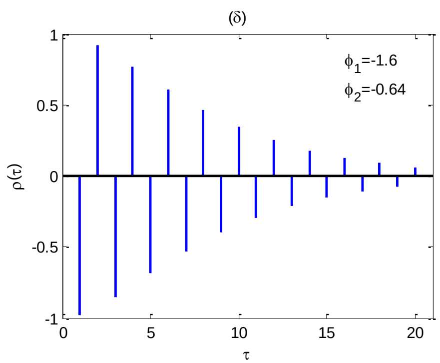
(ζ) $\lambda_1=-0.8$
$\lambda_2=0.95$



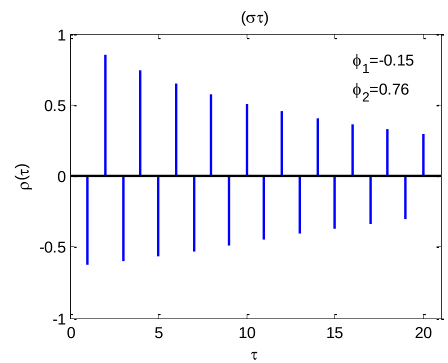
(β) $\lambda_1=-0.8+0.5i$
$\lambda_2=-0.8-0.5i$



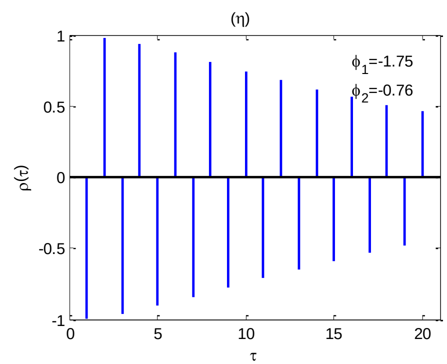
(δ) $\lambda_1=-0.8$
$\lambda_2=-0.8$



(στ) $\lambda_1=0.8$
$\lambda_2=-0.95$



(η) $\lambda_1=-0.8$
$\lambda_2=-0.95$



Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης p, AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p) X_t = Z_t$$

Συνθήκη στασιμότητας

Ρίζες του $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$ να είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου

Αυτοσυσχέτιση

$$\rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \phi_2 \rho_{\tau-2} + \cdots + \phi_p \rho_{\tau-p} \qquad \rho_\tau = \rho_{-\tau}$$

$$\begin{array}{l} \tau = 1 \\ \tau = 2 \\ \cdots \\ \tau = p \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{lllll} \rho_1 = & \phi_1 & +\phi_2 \rho_1 & +\cdots & +\phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 = & \phi_1 \rho_1 & +\phi_2 & +\cdots & +\phi_p \rho_{p-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_p = & \phi_1 \rho_{p-1} & +\phi_2 \rho_{p-2} & +\cdots & +\phi_p \end{array}}$$

Εξισώσεις Yule-Walker

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\rho}_p = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_p = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_p \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\rho}_p$$

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{P}_p^{-1} \boldsymbol{\rho}_p$$

Διασπορά $$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_Z^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 - \cdots - \phi_p \rho_p}$$

Μερική αυτοσυσχέτιση

$\ldots, X_{t-3}, X_{t-2}, X_{t-1}, X_t, \ldots$ συσχέτιση των X_{t-2} και X_t που δεν εξηγείται από το X_{t-1}

Εξισώσεις Yule-Walker

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

Για κάθε k υπολογίζουμε τον συντελεστή $\phi_k \to \phi_{kk}$

$k=1 \qquad \phi_{11} = \rho_1$

$$k=2 \qquad \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$k=3 \qquad \phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$\cdots \qquad \cdots$

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

μερική αυτοσυσχέτιση για υστέρηση (τάξη) k

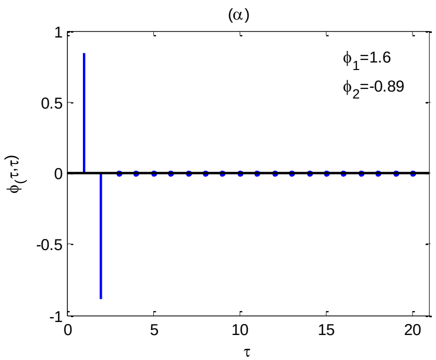
Επαναληπτικός αλγόριθμος των Durbin-Levinson

οι συντελεστές του AR(p) $\phi_{p1}, \phi_{p2}, \ldots, \phi_{pp}$,

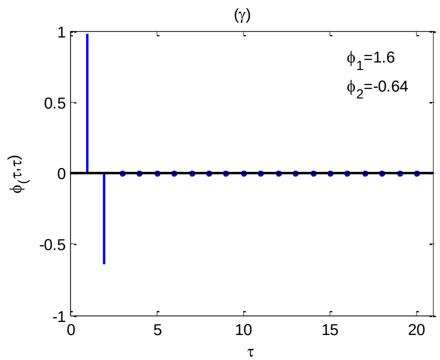
υπολογίζονται επαναληπτικά, όπου για κάθε τάξη k οι συντελεστές υπολογίζονται από τους συντελεστές τάξης k-1

Μερική αυτοσυσχέτιση

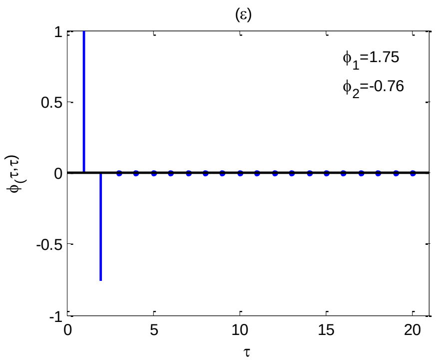
(α) λ_1=0.8+0.5i
λ_2=0.8-0.5i



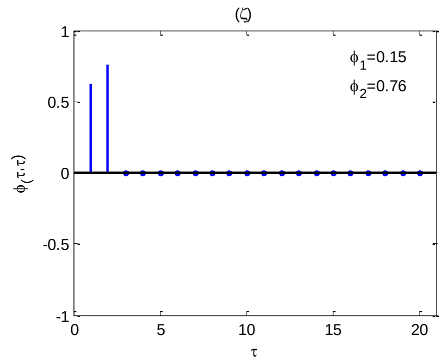
(γ) λ_1=0.8
λ_2=0.8



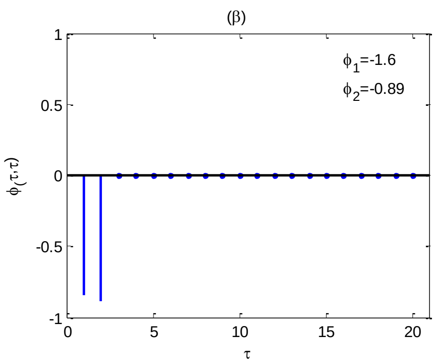
(ε) λ_1=0.8
λ_2=0.95



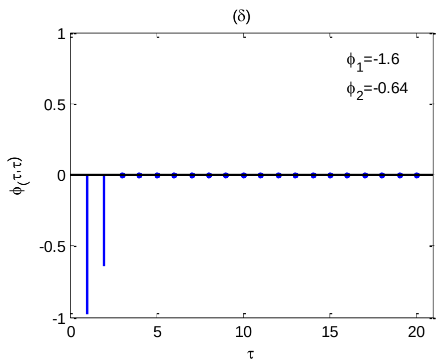
(ζ) λ_1=-0.8
λ_2=0.95



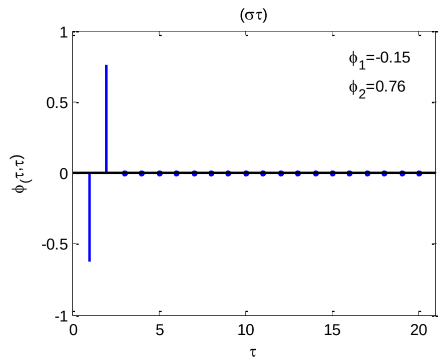
(β) λ_1=-0.8+0.5i
λ_2=-0.8-0.5i



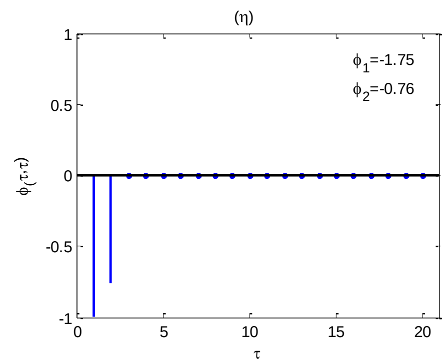
(δ) λ_1=-0.8
λ_2=-0.8



(στ) λ_1=0.8
λ_2=-0.95



(η) λ_1=-0.8
λ_2=-0.95



Διαδικασίες κινούμενου μέσου

Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης q, MA(q)

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q} \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

$$X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q) Z_t \qquad X_t = \theta(B) Z_t \qquad \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

MA(q) είναι στάσιμη

MA(q) είναι αντιστρέψιμη αν $Z_t = \theta^{-1}(B) X_t$

Συνθήκη αντιστρεψιμότητας

Ρίζες του $\theta(\lambda) = 0$ να είναι έξω από το μοναδιαίο κύκλο

Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης 1, ΜΑ(1)

$X_t = Z_t - \theta Z_{t-1} \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$

Συνθήκη αντιστρεψιμότητας: $|\theta| < 1$

Διασπορά $\qquad \sigma_X^2 = (1+\theta^2)\sigma_Z^2$

Αυτοσυσχέτιση

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta}{1+\theta^2} & \tau = 1 \\ 0 & \tau \geq 2 \end{cases}$$

$|\rho_1| \leq 1/2$

Για κάποιο ρ_1 υπάρχουν δύο λύσεις για θ
και μόνο η μία θα πληρεί τη συνθήκη αντιστρεψιμότητας

Παράδειγμα

$X_t = Z_t - 0.4 Z_{t-1}$

$X_t = Z_t - 2.5 Z_{t-1}$

$$\rho_\tau = \begin{cases} -\dfrac{1}{2.9} & \tau = 1 \\ 0 & \tau \geq 2 \end{cases}$$

$X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}$ και $X_t = Z_t - 1/\theta Z_{t-1}$
έχουν την ίδια αυτοσυσχέτιση

Αν η ρίζα του $1-\theta B = 0$ είναι έξω από το μοναδιαίο κύκλο ➔
η ρίζα του $1-1/\theta B = 0$ είναι μέσα στο μοναδιαίο κύκλο

Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης 1, MA(1)

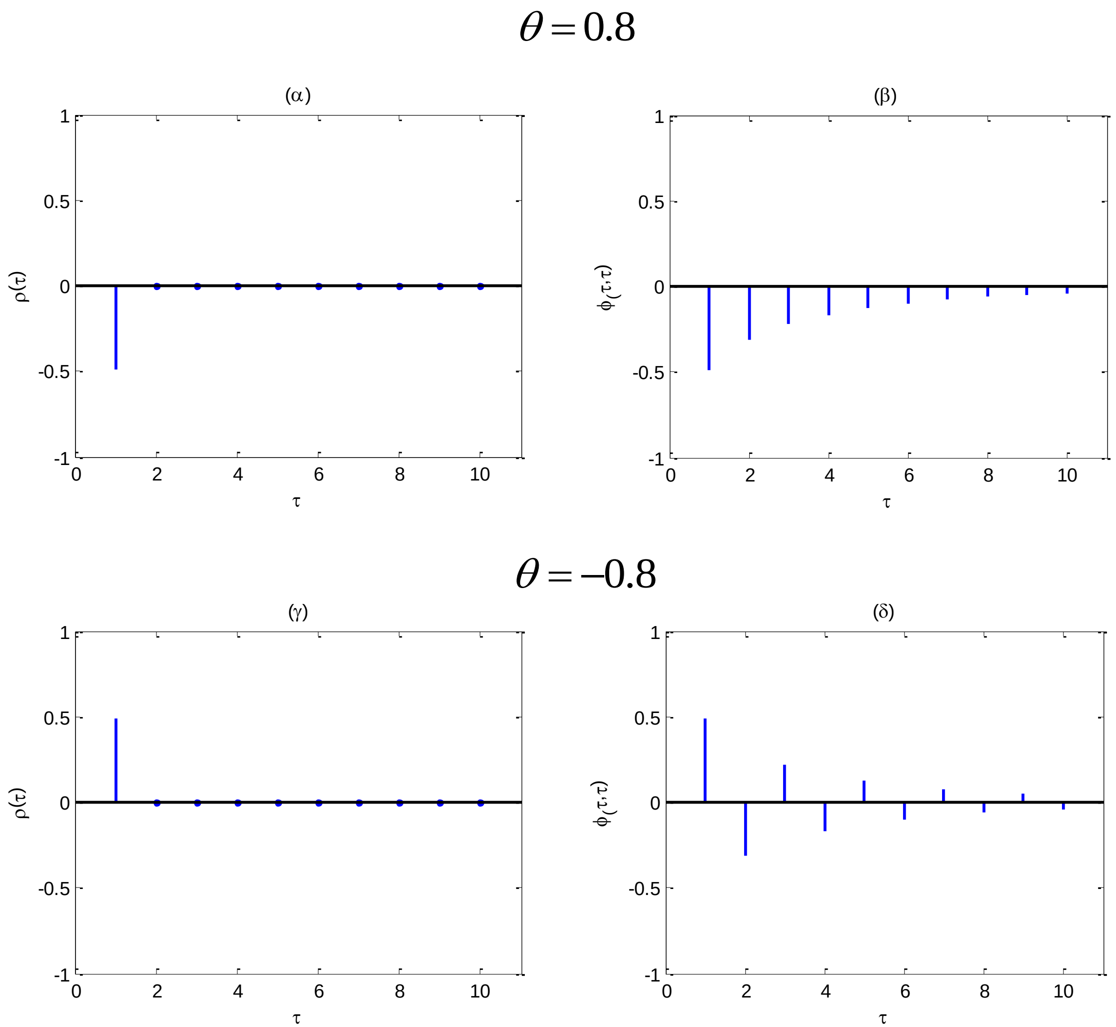
Μερική αυτοσυσχέτιση

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

$$\phi_{2,2} = \frac{-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} = -\frac{\theta^2}{1+\theta^2+\theta^4}$$

$$\phi_{3,3} = \frac{\rho_1^3}{1-2\rho_1^2} = -\frac{\theta^3}{1+\theta^2+\theta^4+\theta^6}$$

$$\boxed{\phi_{\tau,\tau} = -\frac{\theta^\tau(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(\tau+1)}}, \qquad \tau \geq 1}$$



- $\phi_{\tau\tau}$ του MA(1) φθίνει όπως ρ_τ του AR(1)

- ρ_τ του MA(1) φθίνει όπως $\phi_{\tau\tau}$ του AR(1)

- … αλλά για MA(1), ρ_τ και $\phi_{\tau\tau}$ είναι πάντα ≤0.5

Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης 2, MA(2)

$$X_t = \theta(B)Z_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2}, \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο

MA(2) είναι πάντα στάσιμη

MA(2) είναι αντιστρέψιμη αν οι ρίζες του $\theta(B)$ είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου

Διασπορά $\sigma_X^2 = (1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_Z^2$

Αυτοσυσχέτιση

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & \tau = 1 \\ \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & \tau = 2 \\ 0 & \tau > 2 \end{cases}$$

Μερική αυτοσυσχέτιση

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{2,2} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

$$\phi_{3,3} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2-\rho_2)}{1-\rho_2^2 - 2\rho_1^2(1-\rho_2)}$$

$\phi_{\tau,\tau} = \ldots$ πολύπλοκη έκφραση

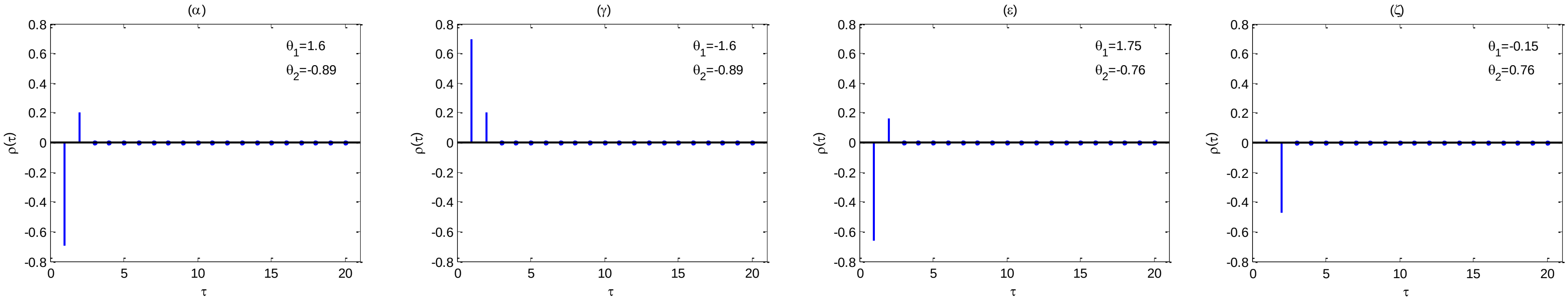
λ_1=0.8+0.5i
λ_2=0.8-0.5i

λ_1=-0.8+0.5i
λ_2=-0.8-0.5i

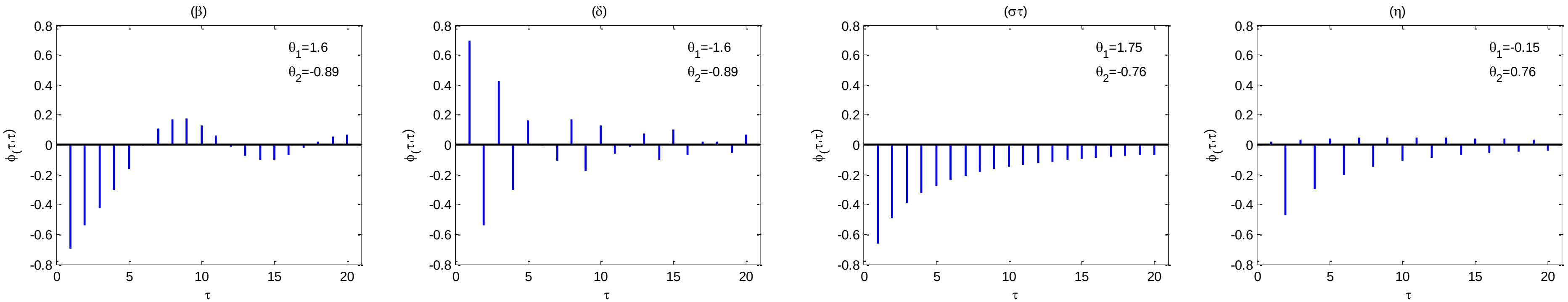
λ_1=0.8
λ_2=0.95

λ_1=0.8
λ_2=-0.95

Αυτοσυσχέτιση



Μερική αυτοσυσχέτιση



- $\phi_{\tau\tau}$ του MA(2) φθίνει όπως ρ_τ του AR(2)

- ρ_τ του MA(2) φθίνει όπως $\phi_{\tau\tau}$ του AR(2)

- … αλλά για MA(2), ρ_τ και $\phi_{\tau\tau}$ είναι πάντα ≤0.5

Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης q, MA(q)

$$X_t = \theta(B)Z_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q} \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma_Z^2)$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Διασπορά $\sigma_X^2 = (1+\theta_1^2 + \cdots \theta_q^2)\sigma_Z^2$

Αυτοσυσχέτιση

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \cdots + \theta_{q-\tau}\theta_q}{1+\theta_1^2+\theta_2^2+\cdots+\theta_q^2} & \tau = 1,2,\ldots,q \\ 0 & \tau > q \end{cases}$$

Η μερική αυτοσυσχέτιση φθίνει με μορφή που καθορίζεται από τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Οι εκφράσεις των $\phi_{\tau\tau}$ ως προς τους συντελεστές θ_1, θ_2, ..., θ_q είναι πολύπλοκες

Μικτή διαδικασία ARMA(p,q)

Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης p, AR(p)

Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης q, MA(q)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2) \qquad X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t$$

$$X_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} Z_t \qquad \frac{\phi(B)}{\theta(B)} X_t = Z_t$$

Στασιμότητα: καθορίζεται από το AR μέρος

Αντιστρεψιμότητα: καθορίζεται από το MA μέρος

Αυτοσυσχέτιση:

Για $\tau > q$ $\quad \gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1} + \cdots + \phi_p \gamma_{\tau-p} \qquad \rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \cdots + \phi_p \rho_{\tau-p}$ όπως για AR(p)

Για $\tau \leq q$ μίξη της αυτοσυσχέτισης για AR(p) και MA(q)

Μικτή διαδικασία ARMA(1,1)

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t - \theta Z_{t-1} \qquad (1-\phi B)X_t = (1-\theta B)Z_t \qquad X_t = \frac{(1-\theta B)}{(1-\phi B)} Z_t$$

Συνθήκη στασιμότητας: $|\phi| < 1$

Συνθήκη αντιστρεψιμότητας: $|\theta| < 1$

Αυτοσυσχέτιση:

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{(\phi-\theta)(1-\phi\theta)}{1+\theta^2-2\phi\theta} & \tau = 1 \\ \phi\rho_{\tau-1} & \tau \geq 2 \end{cases}$$

Μερική αυτοσυσχέτιση $\phi_{\tau\tau}$: Φθίνει με την υστέρηση όπως για MA(1)

Μια ARMA(p,q) διαδικασία με μικρά p,q, παρουσιάζει συσχετίσεις (ρ_τ και $\phi_{\tau\tau}$) που επιτυγχάνονται από AR(p) μόνο για μεγάλη τάξη p, ή
από MA(q) μόνο για μεγάλη τάξη q

Εκτίμηση μοντέλων τύπου AR, MA, ARMA

(στάσιμη) χρονοσειρά
(στοχαστική διαδικασία) $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

(στάσιμη) χρονοσειρά
n παρατηρήσεων $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

μέση τιμή $\boldsymbol{\mu}$

Αυτοδιασπορά

$$\gamma_\tau = \gamma(\tau) = \mathrm{E}\left[(X_t - \mu)(X_{t-\tau} - \mu)\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[X_t X_{t-\tau}\right] - \left(\mathrm{E}\left[X_t\right]\right)^2$$

Αυτοσυσχέτιση

$$\rho_\tau = \rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$$

Δειγματική μέση τιμή $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t$

Δειγματική αυτοδιασπορά

$$c_\tau = c(\tau) = \frac{1}{n}\sum_{t=\tau+1}^{n}(x_t x_{t-\tau} - \bar{x}^2)$$

$$\tau = 0, 1, \ldots, n-1$$

Δειγματική αυτοσυσχέτιση

$$r_\tau = r(\tau) = \frac{c(\tau)}{c(0)}$$

στοχαστική διαδικασία AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

$$Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

στοχαστική διαδικασία MA(q)

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

στοχαστική διαδικασία ARMA(p,q)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$
$$- \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

Εκτίμηση διαδικασίας (μοντέλο)

- AR, MA ή ARMA **?** **άλλο μοντέλο ?**
- τάξη p ή/και q **?**
- εκτίμηση παραμέτρων μοντέλου **?**

$$\mathrm{AR}(p): \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \sigma_Z^2$$

$$\mathrm{MA}(q): \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2$$

$$\mathrm{ARMA}(p,q): \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2$$

Εκτίμηση μοντέλου AR(p)

Υποθέτω στοχαστική διαδικασία AR(p) για τη χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Προσαρμογή διαδικασίας (μοντέλο) AR(p) $\Rightarrow$ εκτίμηση παραμέτρων $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \sigma_Z^2$

Μέθοδος ροπών (μέθοδος Yule-Walker, YW)

Εκτίμηση των παραμέτρων από τις δειγματικές αυτοσυσχετίσεις

$$r_1, r_2, \ldots, r_p, s_X^2 \Rightarrow \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \ldots, \hat{\phi}_p, s_Z^2$$

Εξισώσεις Yule-Walker

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_p \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\rho}_p$$

$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_Z^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \cdots - \phi_p\rho_p}$$

Εκτίμηση των $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \sigma_X^2 \Rightarrow r_1, r_2, \ldots, r_p, s_X^2$ και αντικατάσταση …

$$\begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{p-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{p-1} & r_{p-2} & r_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_p \hat{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{r}_p$$

$$s_X^2 = \frac{s_Z^2}{1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2 - \cdots - \hat{\phi}_p r_p}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{R}_p^{-1} \boldsymbol{r}_p \qquad s_Z^2 = s_X^2 (1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2 - \cdots - \hat{\phi}_p r_p)$$

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ με μέση τιμή μ

Γενική μορφή μοντέλου AR(p) $X_t - \mu = \phi_1 (X_{t-1} - \mu) + \phi_2 (X_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p (X_{t-p} - \mu) + Z_t$

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων (ordinary least squares, OLS)

Προσαρμογή μοντέλου AR(p) στα δεδομένα

$\Downarrow$

Ελαχιστοποίηση αθροίσματος τετραγώνων των σφαλμάτων προσαρμογής

$$\min S(\mu, \phi_1, \ldots \phi_p) = \min \sum_{t=p+1}^{n} \left(x_t - \mu - \phi_1 (x_{t-1} - \mu) - \ldots - \phi_p (x_{t-p} - \mu) \right)^2$$ ως προς $\mu, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$

$$\hat{z}_t = (x_t - \hat{\mu}) - \hat{\varphi}_1 (x_{t-1} - \hat{\mu}) - \ldots - \hat{\varphi}_p (x_{t-p} - \hat{\mu}), \quad t = p+1, \ldots, n$$

$\Downarrow$

$$\hat{\mu}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \ldots, \hat{\phi}_p \quad s_Z^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^{n} \hat{z}_t^2$$

$$\hat{\mu} \simeq \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} x_t$$

AR(1) $X_t - \mu = \phi_1 (X_{t-1} - \mu) + Z_t$

$$S(\mu, \phi_1) = \sum_{t=2}^{n} \left(x_t - \mu - \phi_1 (x_{t-1} - \mu) \right)^2$$

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{x}_{(2)} - \hat{\varphi} \bar{x}_{(1)}}{1 - \hat{\varphi}} \qquad \bar{x}_{(1)} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^{n} x_{t-1} \qquad \bar{x}_{(2)} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^{n} x_t \qquad \hat{\mu} \simeq \bar{x}$$

$$c_1 = \frac{1}{n} \sum_{t=2}^{n} (x_t - \bar{x})(x_{t-1} - \bar{x})$$

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{n} (x_t - \hat{\mu})(x_{t-1} - \hat{\mu})}{\sum_{t=2}^{n} (x_t - \hat{\mu})^2} \simeq \frac{\sum_{t=2}^{n} (x_t - \bar{x})(x_{t-1} - \bar{x})}{\sum_{t=2}^{n} (x_t - \bar{x})^2}$$

$$c_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (x_t - \bar{x})^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{\varphi} \simeq \frac{c_1}{c_0} = r_1$$

Άλλες μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων AR(p)

- Προς τα εμπρός και πίσω (backward – forward approach, FB)
- Αλγόριθμος του Burg (Burg)
- Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood, ML)
  - υπό συνθήκη (conditioned)
  - χωρίς συνθήκη (unconditioned)

ML εκτίμηση είναι η βέλτιστη, οι άλλες μέθοδοι την προσεγγίζουν

Η OLS και ML συμπίπτουν όταν η χρονοσειρά είναι από Γκαουσιανή διαδικασία

Ασυμπτωτικά (για μεγάλο n) συγκλίνουν οι εκτιμήσεις με όλες τις μεθόδους

Η YW έχει την πιο αργή σύγκλιση στη ML

Προσδιορισμός τάξης *p* μοντέλου AR

κριτήριο μερικής αυτοσυσχέτισης

μερική αυτοσυσχέτιση για υστέρηση *τ*: συσχέτιση των $x_t, x_{t-\tau}$ χωρίς τη συσχέτιση με $\underbrace{x_{t-1}, \ldots, x_{t-\tau+1}}$

$$x_t = \phi_{1,1} x_{t-1} + z_t$$

$$x_t = \phi_{1,2} x_{t-1} + \phi_{2,2} x_{t-2} + z_t$$

$$x_t = \phi_{1,3} x_{t-1} + \phi_{2,3} x_{t-2} + \phi_{3,3} x_{t-3} + z_t$$

εκτίμηση του $\phi_{\tau\tau}$ για μοντέλο AR(*τ*)

Η τάξη είναι *p* αν $\hat{\phi}_{p,p} \neq 0$ και $\hat{\phi}_{\tau,\tau} = 0$ για *τ*>*p*

(πτώση από μη-μηδενική σε μηδενική μερική αυτοσυσχέτιση)

κριτήρια με βάση το σφάλμα προσαρμογής

- κριτήριο πληροφορίας του Akaike
  Akaike information criterion (AIC)

$$\mathrm{AIC}(p) = \ln(s_z^2) + \frac{2p}{n}$$

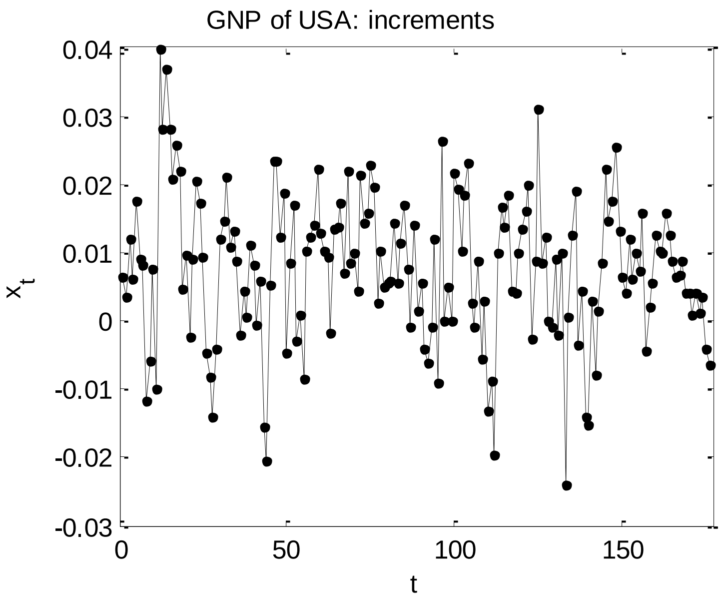
- κριτήριο Μπεϋζιανής πληροφορίας (Scwartz)
  Bayesian information criterion (BIC)

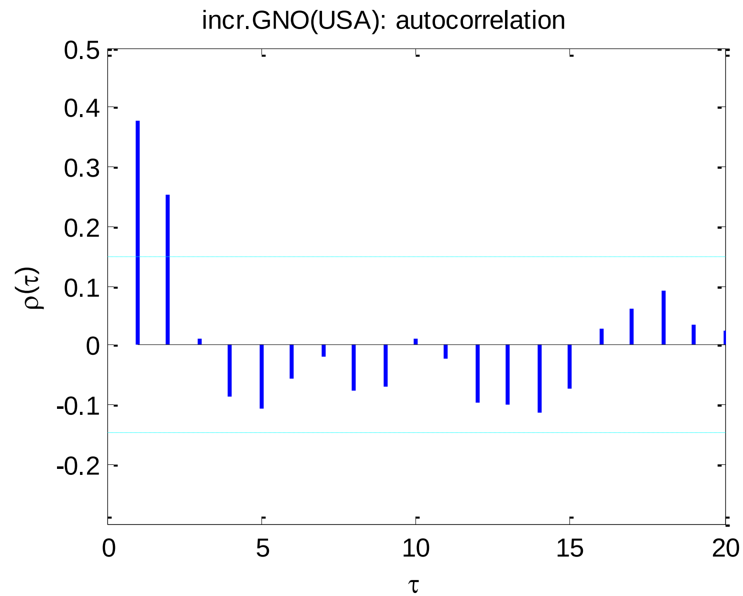
$$\mathrm{BIC}(p) = \ln(s_z^2) + \frac{p \ln(n)}{n}$$

- κριτήριο τελικού σφάλματος πρόβλεψης
  Final prediction error (FPE)

$$\mathrm{FPE}(p) = s_z^2 \frac{n+p}{n-p}$$

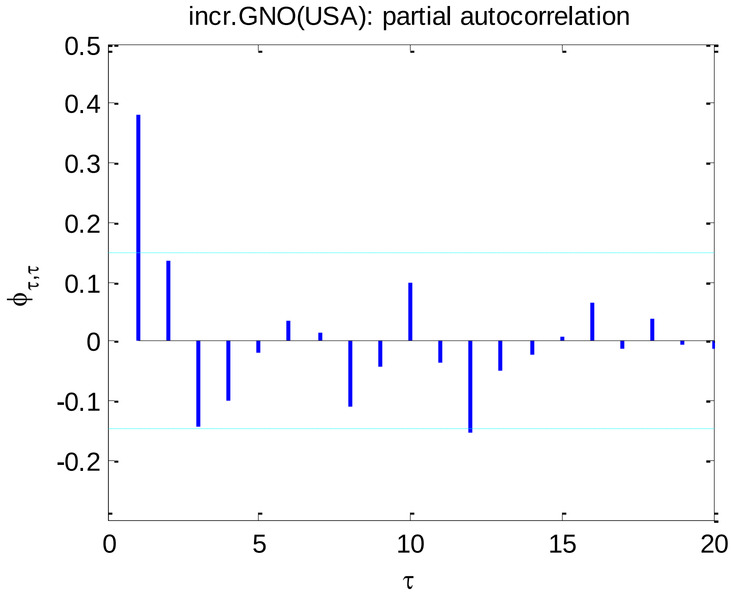
Παράδειγμα Ρυθμός μεταβολής του ακαθάριστου εθνικού προϊόντος (ΑΕΠ) των ΗΠΑ (τετραμηνιαίες τιμές, 2ο τετράμηνο 1947 – 1ο τετράμηνο 1991). Η εποχικότητα έχει διορθωθεί (αφαιρώντας τον εποχικό κύκλο).

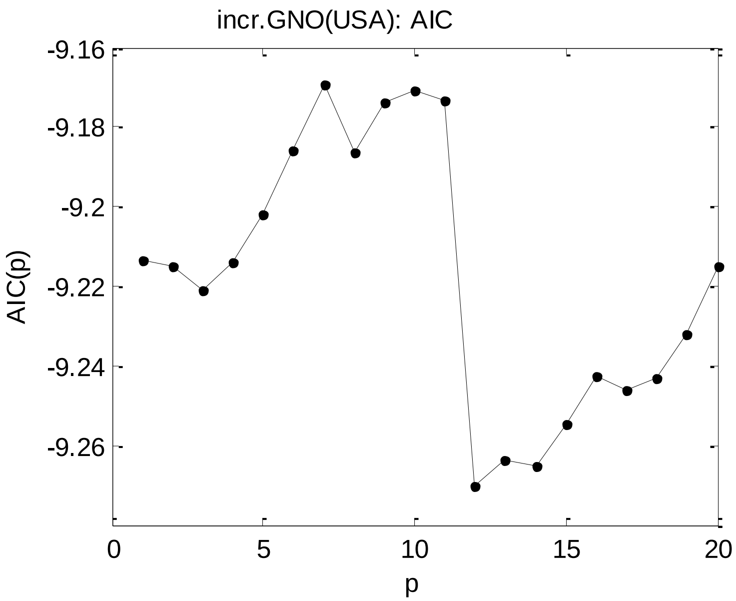




στάσιμη ?

συσχετίσεις?





τάξη
AR μοντέλου ?

AR(3) ?

εκτίμηση παραμέτρων

$$x_t - \hat{\mu} \rightarrow x_t \qquad \hat{\mu} = 0.0077$$

OLS → $\hat{\phi}_1 = 0.35 \quad \hat{\phi}_2 = 0.18 \quad \hat{\phi}_3 = -0.14$

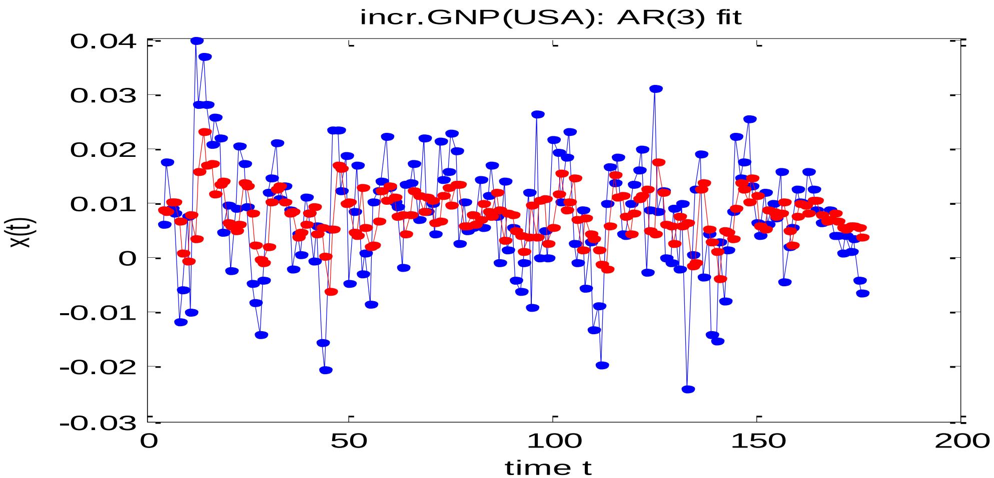
$$\hat{\phi}_0 = \hat{\mu}\left(1 - \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_3\right) = 0.0047$$

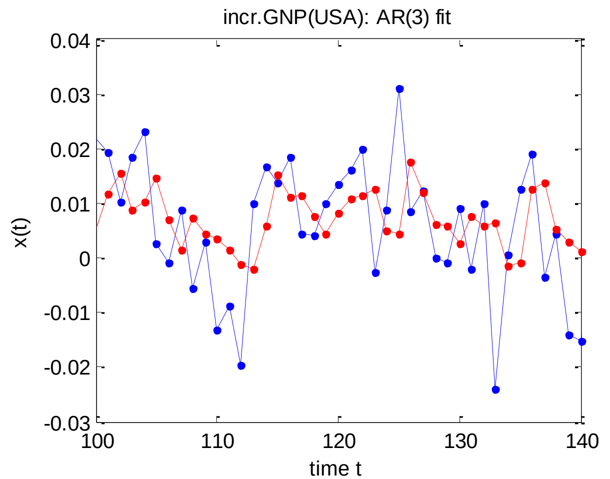
εκτίμηση $\hat{x}_t = 0.0047 + 0.35x_{t-1} + 0.18x_{t-2} - 0.14x_{t-3} \qquad t = 4,\ldots,176$

σφάλματα ή υπόλοιπα (residual) εκτίμησης $\hat{z}_t = x_t - \hat{x}_t$ $\qquad s_z^2 = \hat{\sigma}_z^2 = 0.0000989$

$$s_z = \hat{\sigma}_z = 0.0098$$

προσαρμοσμένο AR(3) $x_t = 0.0047 + 0.35x_{t-1} + 0.18x_{t-2} - 0.14x_{t-3} + z_t$





Διάγνωση καταλληλότητας μοντέλου

είναι τα υπόλοιπα ανεξάρτητα → έλεγχο ανεξαρτησίας στα $\left\{\hat{z}_t\right\}_{t=p+1}^{n}$

Χρονοσειρές - Μάθημα 5
Εκτίμηση μοντέλου MA(q)

στοχαστική διαδικασία AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

$$Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

στοχαστική διαδικασία MA(q)

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

στοχαστική διαδικασία ARMA(p,q)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

Εκτίμηση διαδικασίας (μοντέλο)

- AR, MA ή ARMA **?** **άλλο μοντέλο ?**
- τάξη p ή/και q **?**
- εκτίμηση παραμέτρων μοντέλου **?**

$$\mathrm{AR}(p): \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \sigma_Z^2$$

$$\boxed{\mathrm{MA}(q): \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2}$$

$$\mathrm{ARMA}(p,q): \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2$$

Υποθέτω στοχαστική διαδικασία MA(q) για τη χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Προσαρμογή διαδικασίας (μοντέλο) MA(q) ⇨ εκτίμηση παραμέτρων $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2$

MA(q) $X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$

Μέθοδος ροπών

Διασπορά $\sigma_X^2 = (1+\theta_1^2 + \cdots \theta_q^2)\sigma_Z^2$

Αυτοσυσχέτιση

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \cdots + \theta_{q-\tau}\theta_q}{1+\theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2} & \tau = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & \tau > q \end{cases}$$

Μη-γραμμικό σύστημα εξισώσεων ως προς τις παραμέτρους $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$

Εκτίμηση των $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_q, \sigma_X^2 \Rightarrow r_1, r_2, \ldots, r_q, s_X^2$

Αλγόριθμος innovation

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Προσαρμογή μοντέλου MA(q) στα δεδομένα

$\Downarrow$

Ελαχιστοποίηση αθροίσματος τετραγώνων των σφαλμάτων προσαρμογής

$$\min S(\mu, \theta_1, \ldots \theta_q) = \min \sum_{t=q+1}^{n} (x_t - \mu + \theta_1 z_{t-1} + \ldots + \theta_q z_{t-q})^2$$ ως προς $\mu, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$

Αριθμητική μέθοδος βελτιστοποίησης

$\Downarrow$

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_q$

MA(1) $X_t - \mu = Z_t - \theta Z_{t-1}$

Μέθοδος ροπών

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta}{1+\theta^2} & \tau = 1 \\ 0 & \tau \geq 2 \end{cases}$$

$$|r_1| > 0.5 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{r_1}{|r_1|}$$

$$|r_1| \leq 0.5 \Rightarrow r_1\hat{\theta}^2 + \hat{\theta} + r_1 = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1}$$

Επιλέγουμε τη λύση $|\hat{\theta}| < 1$ που δίνει αντιστρεψιμότητα

$$\sigma_X^2 = (1+\theta^2 + \cdots \theta^q)\sigma_Z^2 \qquad s_Z^2 = \frac{s_X^2}{1+\hat{\theta}^2}$$

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Υποθέτω $z_0 = 0$ (και $\mu = 0$) $\quad z_t = x_t + \theta z_{t-1}$

$$z_1 = x_1$$

$$z_2 = x_2 + \theta z_1 = x_2 + \theta x_1$$

$$z_3 = x_3 + \theta z_2 = x_3 + \theta(x_2 + \theta x_1) = x_3 + \theta x_2 + \theta^2 x_1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$z_n = x_n + \theta z_{n-1} = x_n + \theta x_{n-1} + \theta^2 x_{n-2} + \cdots + \theta^{n-2} x_2 + \theta^{n-1} x_1$$

$$\min \sum_{t=1}^{n} z_t^2 = \min\left\{x_1^2 + (x_2 + x_1\theta)^2 + (x_3 + x_2\theta + x_1\theta^2)^2 \ldots + (x_n + x_{n-1}\theta + \cdots + x_1\theta^{n-1})^2\right\}$$

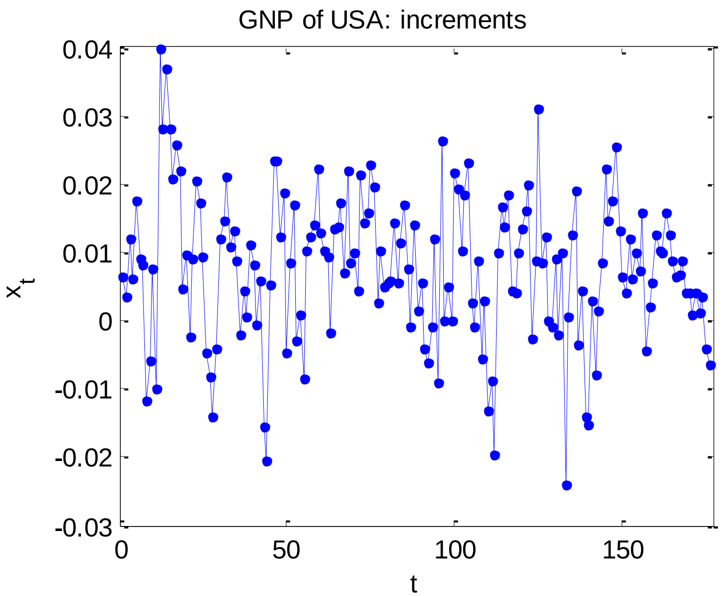
$$\min\left\{a_0 + a_1\theta + \cdots + a_{2n-2}\theta^{2n-2}\right\}$$

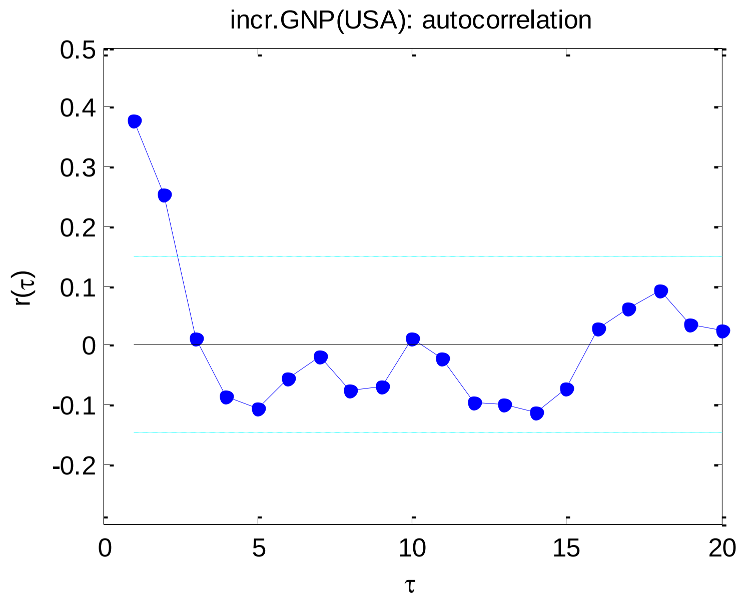
$2n$-1 λύσεις, θα πρέπει να επιλέξω λύση $|\hat{\theta}| < 1$

↓

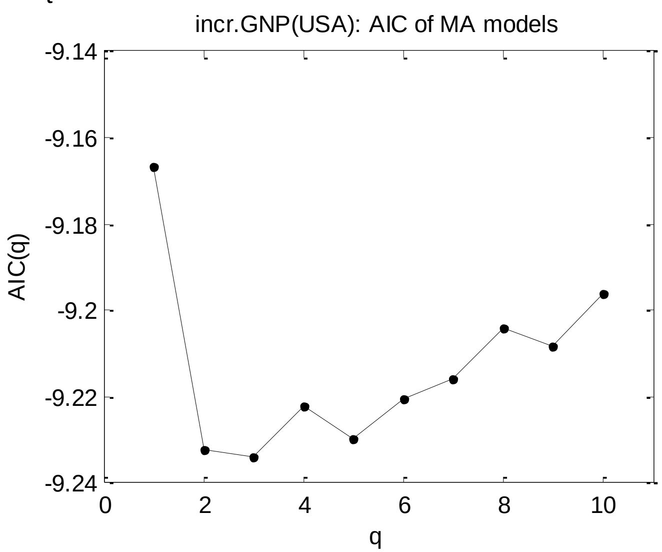
προγραμματισμός λύσης ελαχίστων τετραγώνων με περιορισμούς για αντιστρεψιμότητα

Παράδειγμα Ρυθμός μεταβολής του ακαθάριστου εθνικού προϊόντος (ΑΕΠ) των ΗΠΑ (τετραμηνιαίες τιμές, 2ο τετράμηνο 1947 – 1ο τετράμηνο 1991). Η εποχικότητα έχει διορθωθεί (αφαιρώντας τον εποχικό κύκλο).





τάξη
MA μοντέλου ?



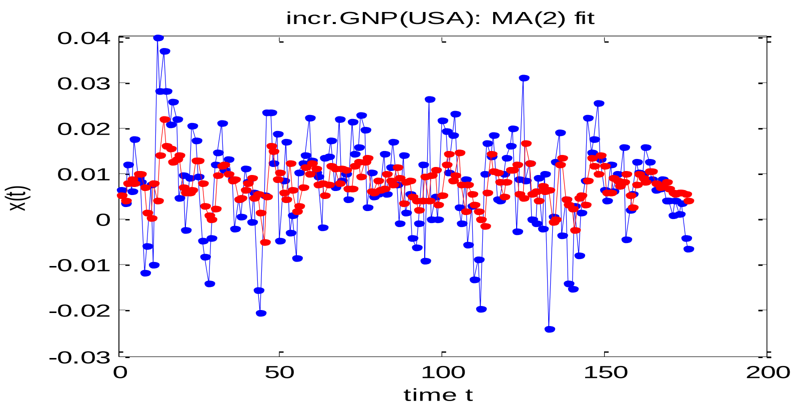
MA(2) ?

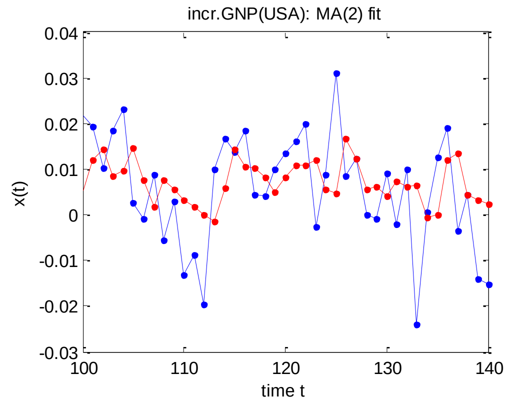
εκτίμηση παραμέτρων $\bar{x} = 0.0077$

OLS → $\hat{\theta}_1 = -0.312 \quad \hat{\theta}_2 = -0.272$

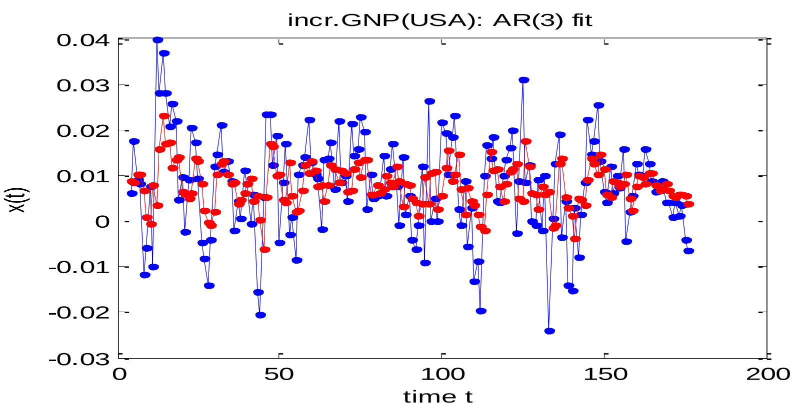
διασπορά σφαλμάτων (υπολοίπων) $s_z^2 = 0.000097 \quad s_z = 0.00983$

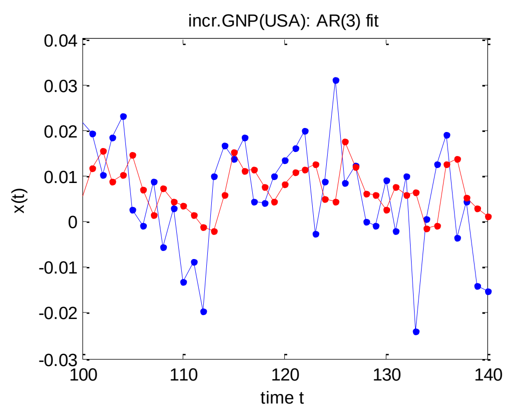
προσαρμοσμένο MA(2) $x_t = 0.0077 + z_t + 0.312 z_{t-1} + 0.272 z_{t-2} \qquad t = 1, \ldots, 176$





προσαρμογή με MA(2)





προσαρμογή με AR(3)

Διάγνωση καταλληλότητας μοντέλου

είναι τα υπόλοιπα ανεξάρτητα → έλεγχο ανεξαρτησίας στα $\{\hat{z}_t\}_{t=p+1}^{n}$

Εκτίμηση μοντέλου ARMA(p,q)

στοχαστική διαδικασία AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

$$Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

στοχαστική διαδικασία MA(q)

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

στοχαστική διαδικασία ARMA(p,q)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$
$$- \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

Εκτίμηση διαδικασίας (μοντέλο)

- AR, MA ή ARMA **?** **άλλο μοντέλο ?**
- τάξη p ή/και q **?**
- εκτίμηση παραμέτρων μοντέλου **?**

$\mathrm{AR}(p): \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \sigma_Z^2$

$\mathrm{MA}(q): \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2$

$\boxed{?}$

$\boxed{\mathrm{ARMA}(p,q): \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2}$

Υποθέτω στοχαστική διαδικασία ARMA(p,q) για τη χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Προσαρμογή διαδικασίας (μοντέλο) ARMA(p,q)

⇓

εκτίμηση παραμέτρων $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2$

Μέθοδος ροπών και μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων όπως για MA(q)

ARMA(1,1) $X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + Z_t - \theta Z_{t-1}$

Μέθοδος ροπών

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{(\phi-\theta)(1-\phi\theta)}{1+\theta^2-2\phi\theta} & \tau = 1 \\ \phi\rho_{\tau-1} & \tau \geq 2 \end{cases}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1+\theta^2-2\phi\theta}{1-\phi^2}\sigma_Z^2$$

Εκτίμηση των $\rho_1, \rho_2, \ldots, \sigma_X^2 \Rightarrow r_1, r_2, \ldots, r_p, s_X^2$

Επίλυση συστήματος εξισώσεων ως προς ϕ, θ $\boxed{?}$

$$s_Z^2 = \frac{1-\hat{\phi}^2}{1+\hat{\theta}^2-2\hat{\phi}\hat{\theta}} s_X^2$$

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Υποθέτω $z_0 = 0$ (και $x_0 = \mu = 0$)

$$z_1 = \boxed{x_1}$$

$$z_2 = x_2 - \phi x_1 + \theta z_1 = \boxed{x_2 + (\theta-\phi)x_1}$$

$$z_3 = x_3 - \phi x_2 + \theta z_2 = \boxed{x_3 + (\theta-\phi)x_2 + \theta(\theta-\phi)x_1}$$

$$\vdots$$

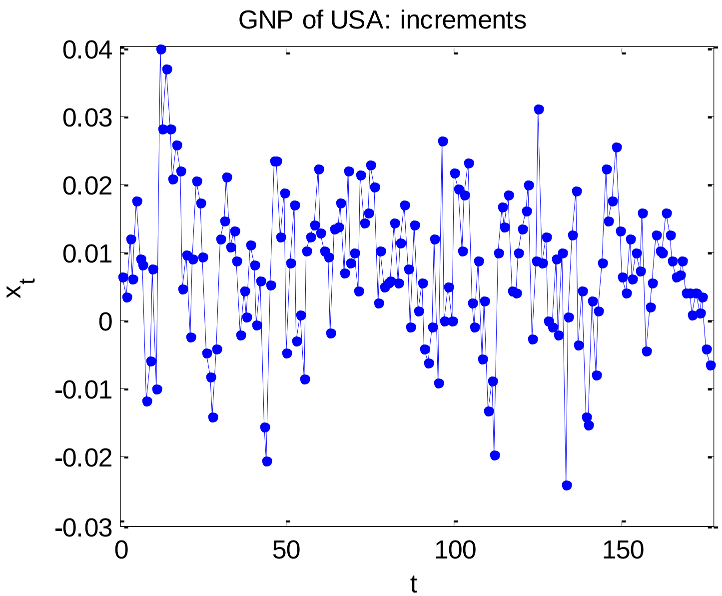
$$z_n = x_n - \phi x_{n-1} + \theta z_{n-1} = \boxed{x_n - (\theta-\phi)x_{n-1} + \theta(\theta-\phi)x_{n-2} + \cdots + \theta^{n-2}(\theta-\phi)x_1}$$

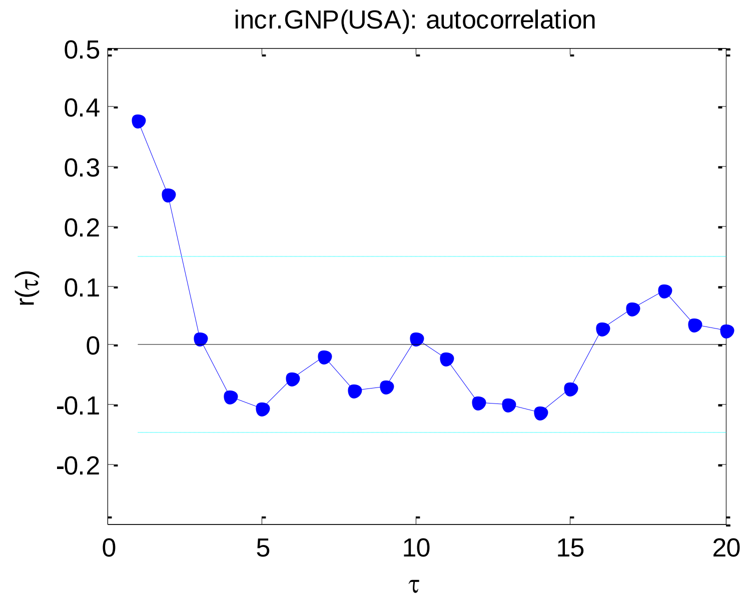
$$\min \sum_{t=1}^{n} z_t^2$$

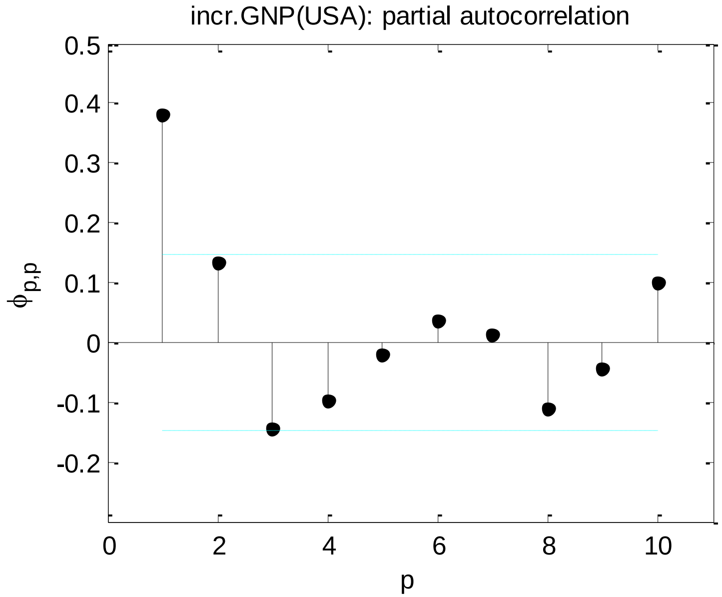
προγραμματισμός λύσης ελαχίστων τετραγώνων με περιορισμούς για αντιστρεψιμότητα και στασιμότητα

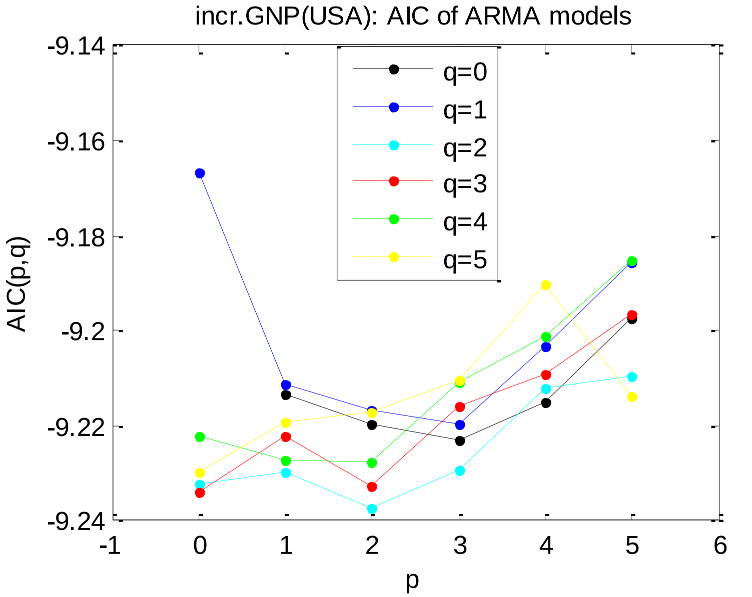
Παράδειγμα

Ρυθμός μεταβολής του ακαθάριστου εθνικού προϊόντος (ΑΕΠ) των ΗΠΑ (τετραμηνιαίες τιμές, 2ο τετράμηνο 1947 – 1ο τετράμηνο 1991). Η εποχικότητα έχει διορθωθεί (αφαιρώντας τον εποχικό κύκλο).









τάξη ARMA μοντέλου ?

ARMA(2,2) ?

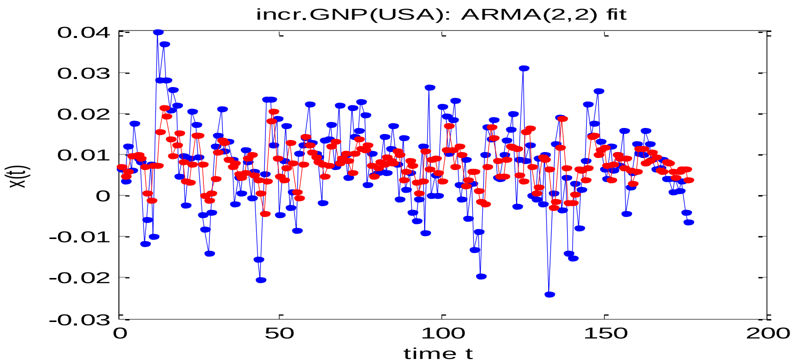
εκτίμηση παραμέτρων $\bar{x} = 0.0077$

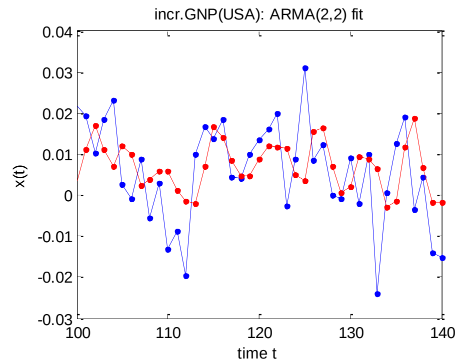
OLS → $\hat{\phi}_1 = 0.614 \quad \hat{\phi}_2 = -0.455 \qquad \hat{\theta}_1 = 0.301 \quad \hat{\theta}_2 = -0.600$

διασπορά σφαλμάτων (υπολοίπων) $s_z^2 = 0.000097 \quad s_z = 0.00983$

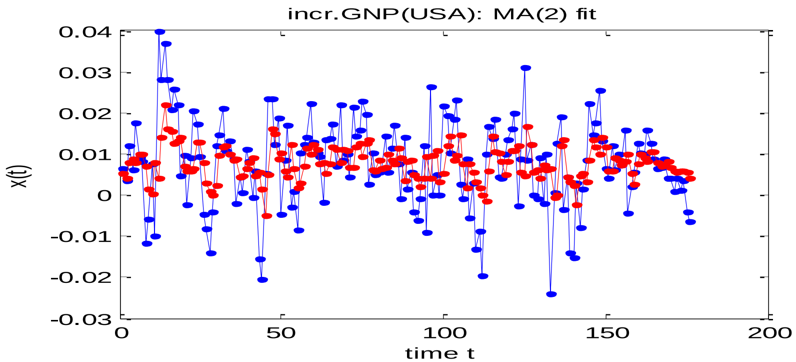
$t = 1, \ldots, 176$

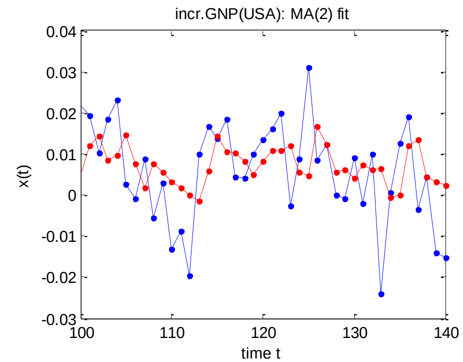
προσαρμοσμένο ARMA(2,2) $\hat{x}_t = 0.0065 + 0.614 x_{t-1} - 0.455 x_{t-2} + z_t - 0.301 z_{t-1} + 0.600 z_{t-2}$



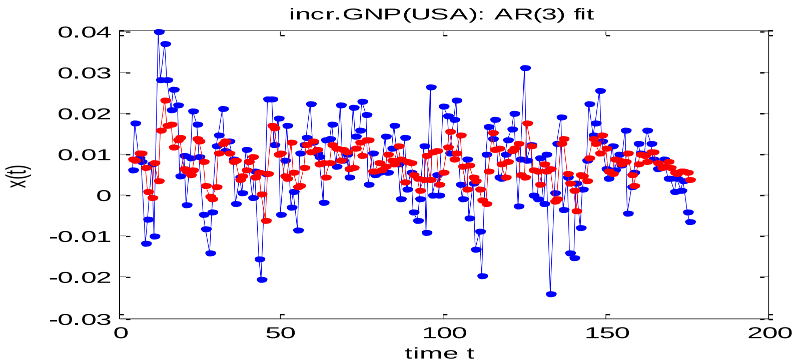


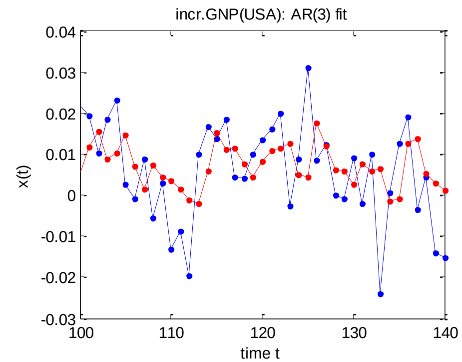
προσαρμογή με ARMA(2,2)





προσαρμογή με MA(2)





προσαρμογή με AR(3)

Μοντέλο χρονοσειράς με τάση (ARIMA)

$\{Y_t\}_{t=1}^{\infty}$ **τυχαίος περίπατος** (μη-στάσιμη διαδικασία)

$Y_t = Y_{t-1} + X_t = X_1 + X_2 + \cdots X_t$ $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ iid $\mathrm{E}[X_t] = 0$ $\mathrm{E}[X_t^2] = \sigma^2$

διαδικασία AR(1) για $\phi = 1$

Πρώτες διαφορές: $X_t = (1-B)Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ διαδικασία iid

$\{Y_t\}_{t=1}^{\infty}$ μη-στάσιμη διαδικασία **που παρουσιάζει τάση**

πρώτες διαφορές: $X_t = Y_t - Y_{t-1}$ στάσιμη διαδικασία **?**

NAI

OXI

διαφορές δεύτερης τάξης: $X'_t = X_t - X_{t-1} = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$ στάσιμη διαδικασία **?**

OXI **NAI**

$X_t = \nabla^d Y_t$ $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ στάσιμη μετά από διαφορές d τάξης:

$= (1-B)^d Y_t$

$\boxed{\text{Συνήθως } d = 1}$

AR(p), MA(q), ARMA(p,q) **?**

$\{Y_t\}_{t=1}^{\infty}$ μη-στάσιμη διαδικασία **ARIMA(p,d,q)**

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t$$

$$\phi(B)\nabla^d Y_t = \theta(B) Z_t$$

$$\phi(B)(1-B)^d Y_t = \theta(B) Z_t$$

Το πολυώνυμο $\phi(B)(1-B)^d$ έχει μια ρίζα =1 και όλες τις άλλες εκτός του μοναδιαίου κύκλου

Προσαρμογή μοντέλου ARIMA (διαδικασία Box-Jenkins)

χρονοσειρά παρατηρήσεων $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

διάγραμμα ιστορίας (γράφημα χρονοσειράς)
αυτοσυσχέτιση (ισχυρή και φθίνει πολύ αργά)
άλλο?

ένδειξη πως έχει τάση

διαφορές τάξης d $\quad x_t = (1-B)^d y_t$
άλλο?

στάσιμη χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

τάξη μοντέλου
εκτίμηση παραμέτρων μοντέλου

προσαρμογή μοντέλου AR(p), MA(q), ARMA(p,q)

διαγνωστικός έλεγχος

επάρκεια (adequacy) του μοντέλου

κατάλληλο μοντέλο ARMA(p,q) για $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

με τον αντίστροφο μετασχηματισμό του $x_t = (1-B)^d y_t$

έχουμε το μοντέλο ARIMA(p, d,q) για $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

αν η αυτοσυσχέτιση φθίνει στο 0

η χρονοσειρά είναι στάσιμη

αν η αυτοσυσχέτιση είναι στατιστικά ασήμαντη

είναι iid ? έλεγχος ανεξαρτησίας

ΝΑΙ

ΣΤΟΠ

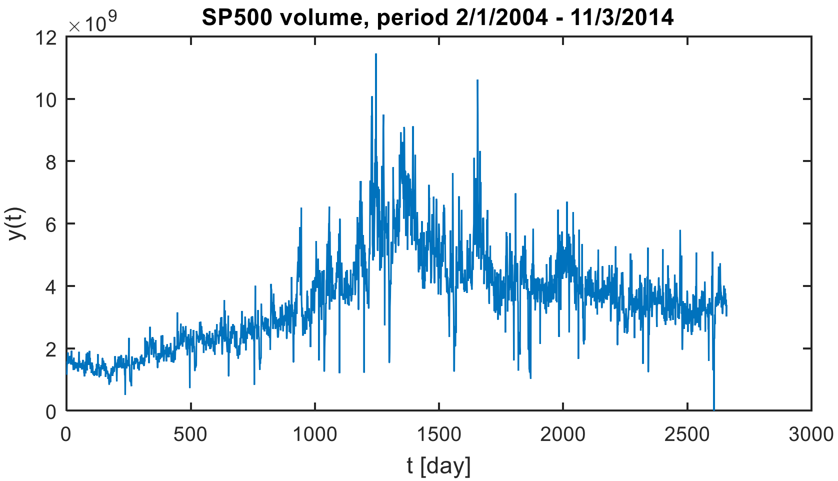
ΟΧΙ

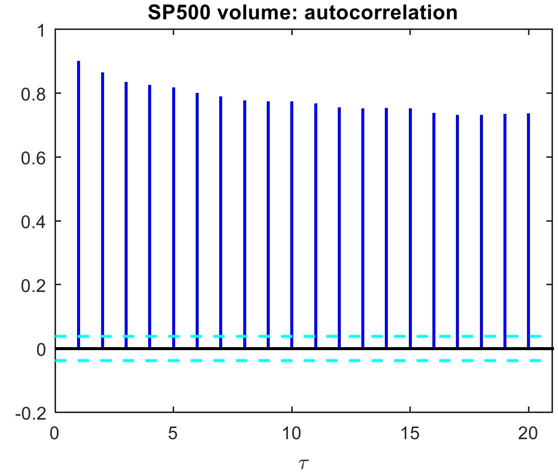
μη-γραμμικό μοντέλο?

πρόβλεψη?

Παράδειγμα Όγκος συναλλαγών για το δείκτη SP500 την περίοδο 2/1/2004 - 11/3/2014

$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ πραγματικές μετρήσεις

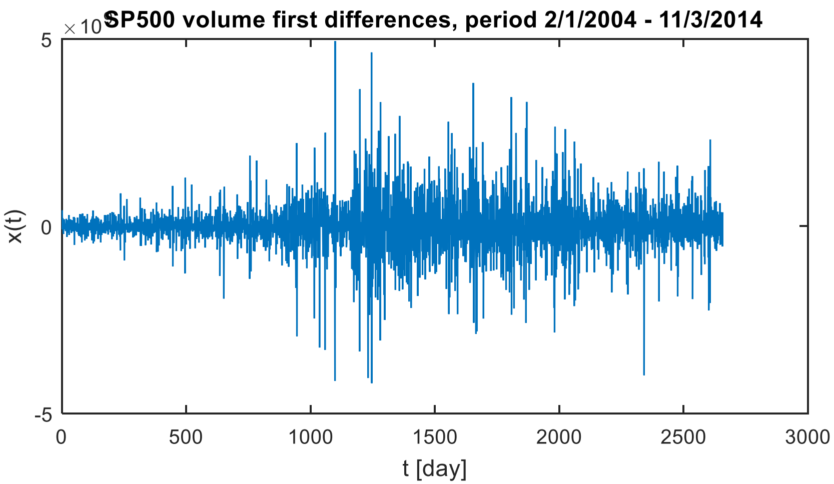


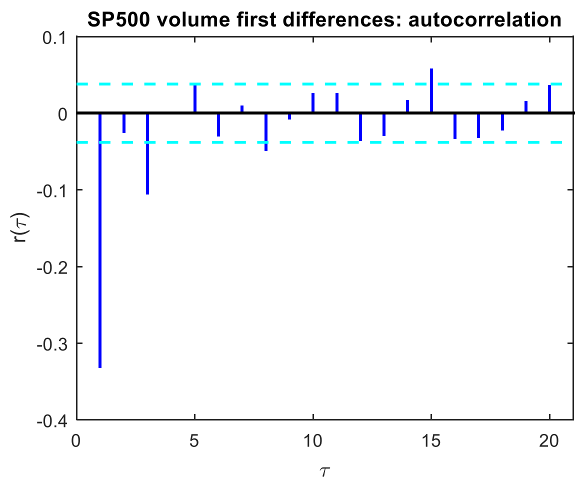


στάσιμη χρονοσειρά?

ΟΧΙ

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ πρώτες διαφορές



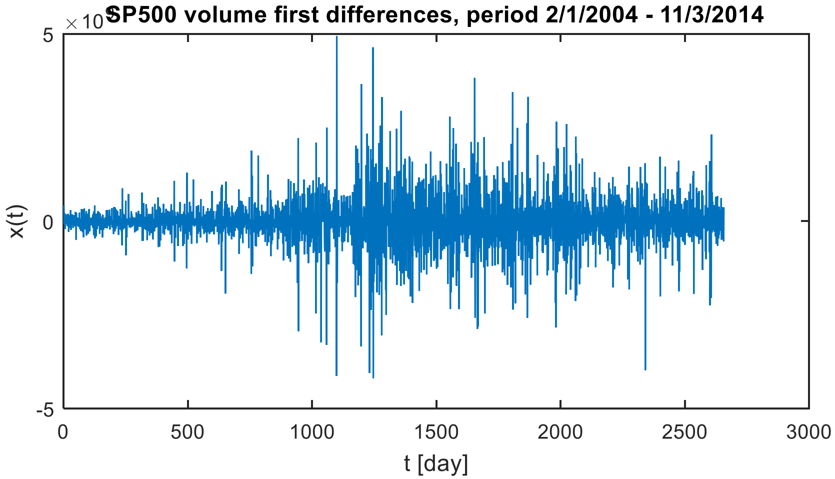


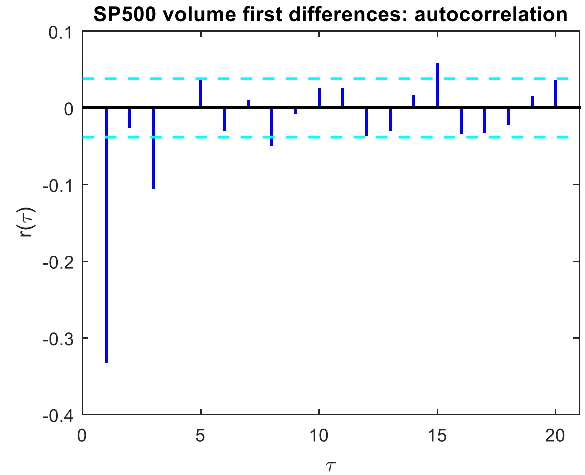
στάσιμη χρονοσειρά?

ΝΑΙ

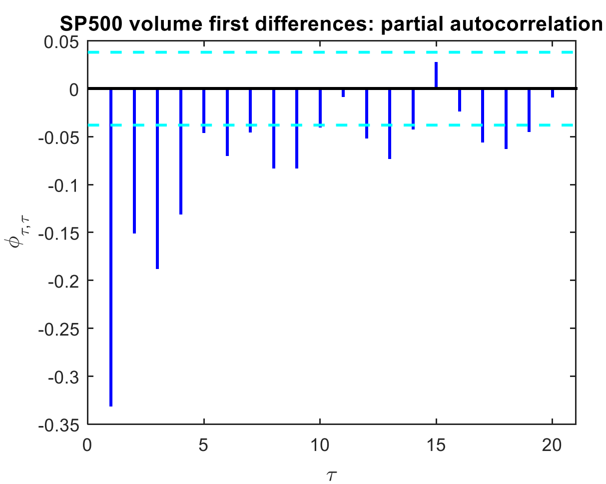
Παράδειγμα Όγκος συναλλαγών για το δείκτη SP500 την περίοδο 2/1/2004 - 11/3/2014

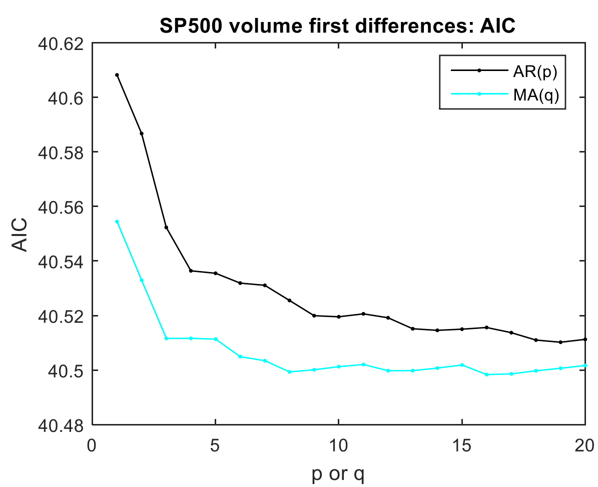
$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ πρώτες διαφορές

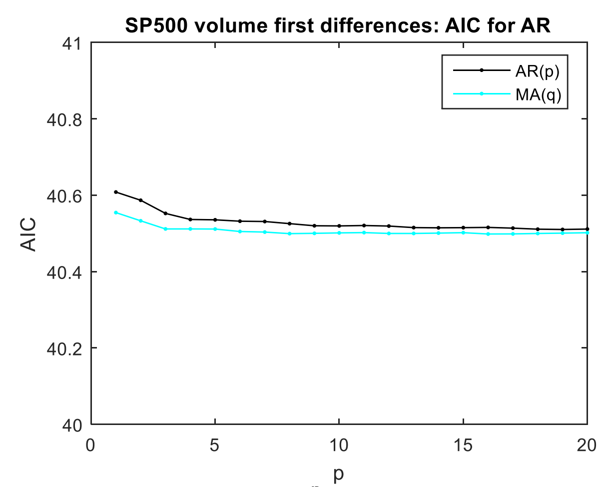




κατάλληλο μοντέλο ?







AR? MA? ARMA? τάξη?