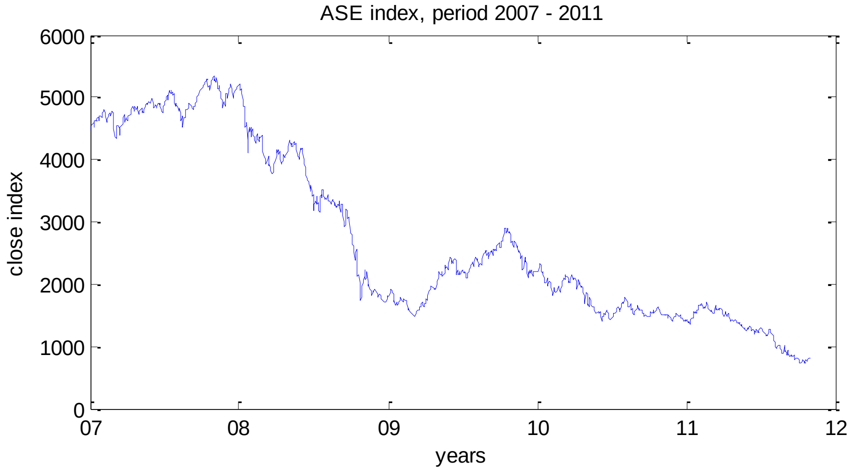
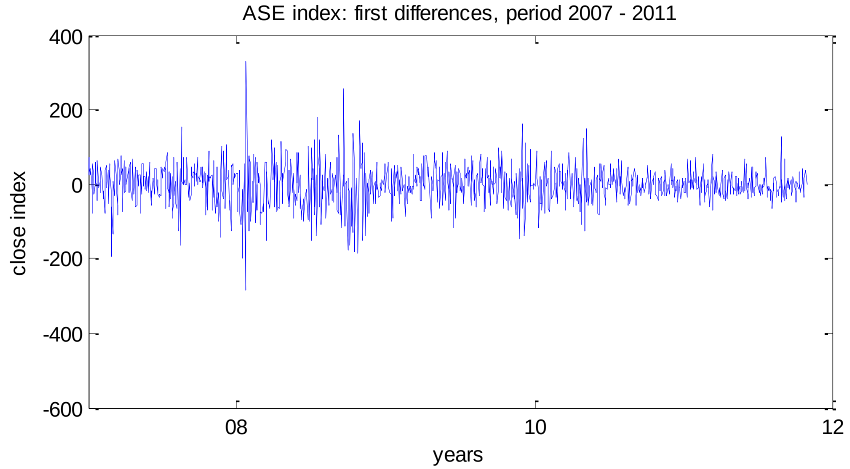
Μάθημα 2:
Μη-στάσιμη χρονοσειρά, έλεγχος μοναδιαίας ρίζας και έλεγχος ανεξαρτησίας

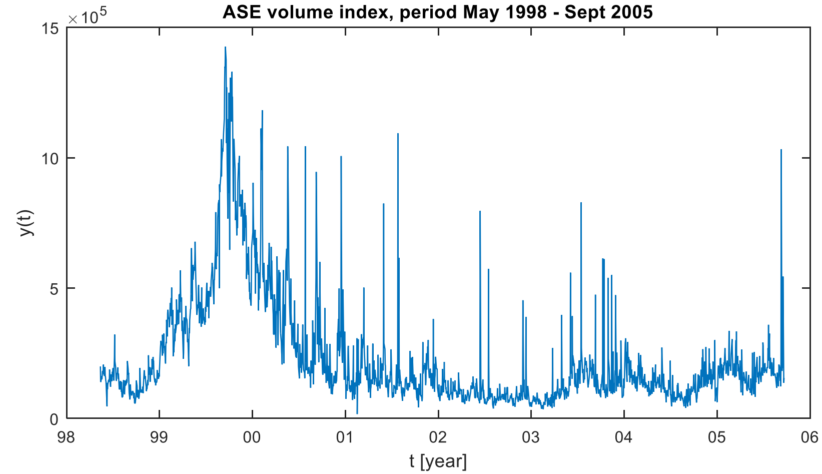
- Σταθεροποίηση διασποράς
- Απαλοιφή τάσης και περιοδικότητας / εποχικότητας
- Έλεγχοι μοναδιαίας ρίζας
- Έλεγχος ανεξαρτησίας
- Ασκήσεις



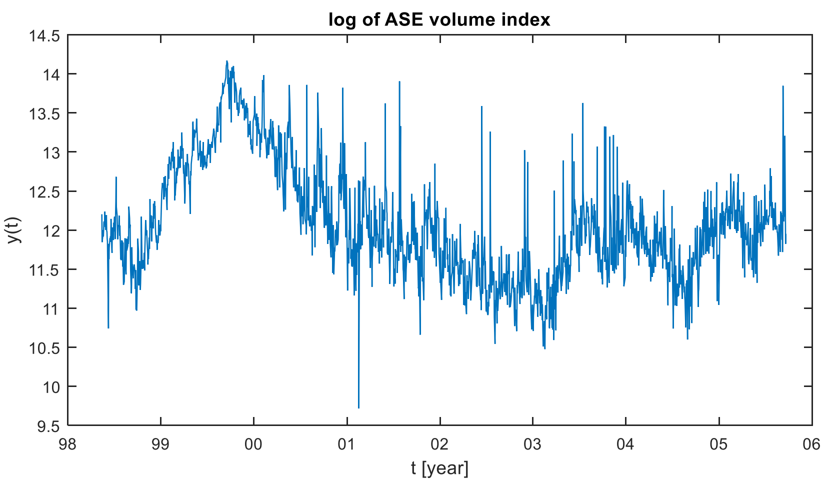


Σταθεροποίηση διασποράς

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$



$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$



Μετασχηματισμός $X_t = T(Y_t)$ που σταθεροποιεί τη διασπορά της Y_t ?

$$\mathrm{Var}[X_t] = \mathrm{const}$$

Απλή λύση: $X_t = \log(Y_t)$

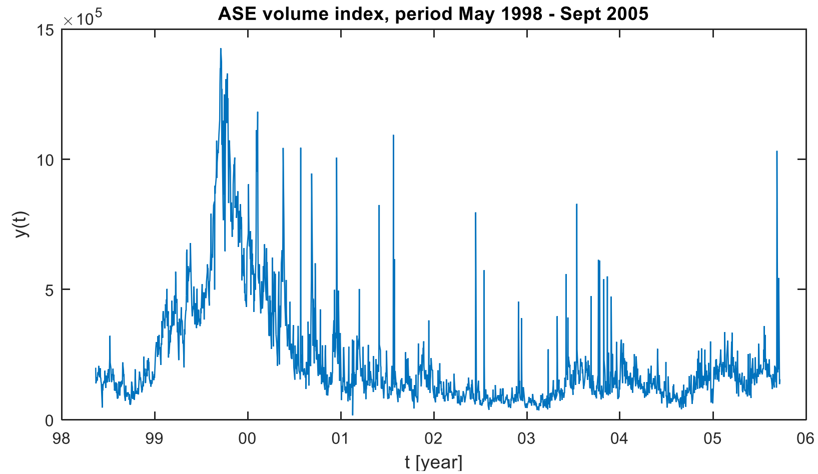
Μετασχηματισμός δύναμης (Box-Cox):

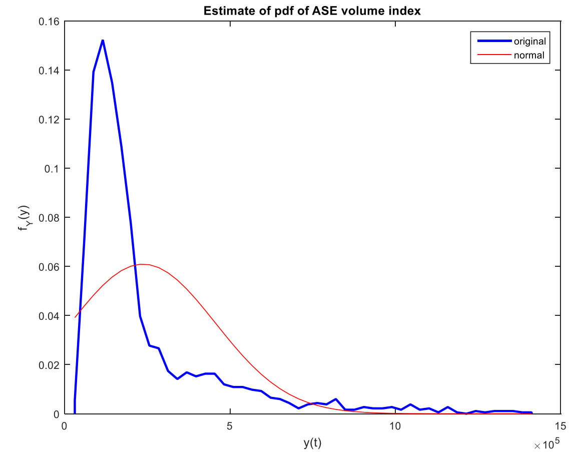
$$X_t = \frac{Y_t^{\lambda} - 1}{\lambda}$$

Υπόθεση: $\mathrm{Var}[Y_t]$ αλλάζει ως συνάρτηση της τάσης μ_t

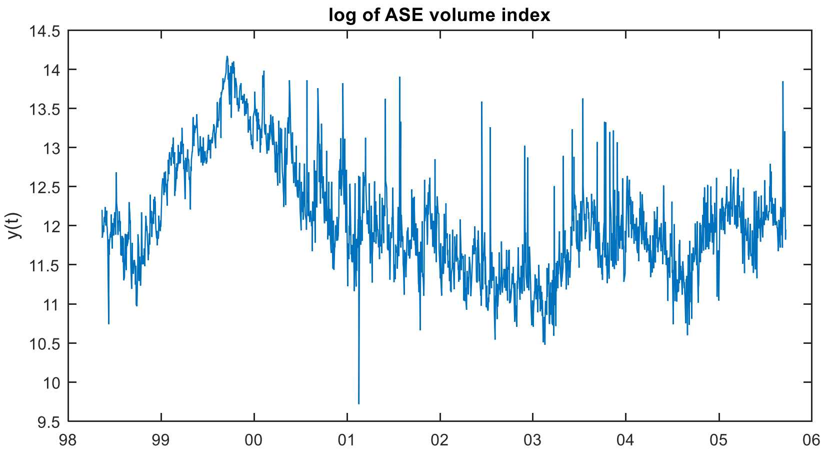
λ	X_t	$\mathrm{Var}[y_t]$
-1	$\frac{1}{Y_t}$	$c\mu_t^4$
-0.5	$\frac{1}{\sqrt{Y_t}}$	$c\mu_t^3$
0	$\log(Y_t)$	$c\mu_t^2$
0.5	$\sqrt{Y_t}$	$c\mu_t$

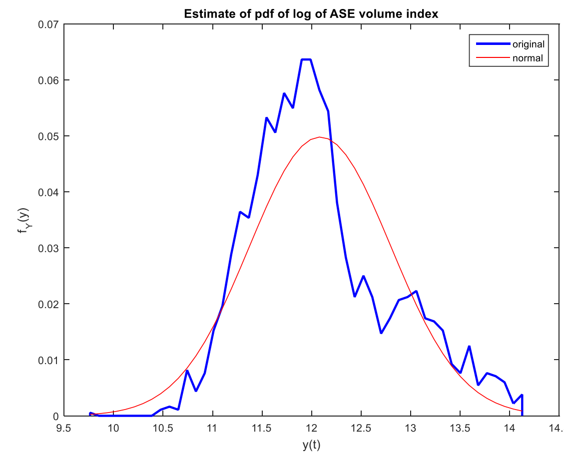
Άλλος μετασχηματισμός ?



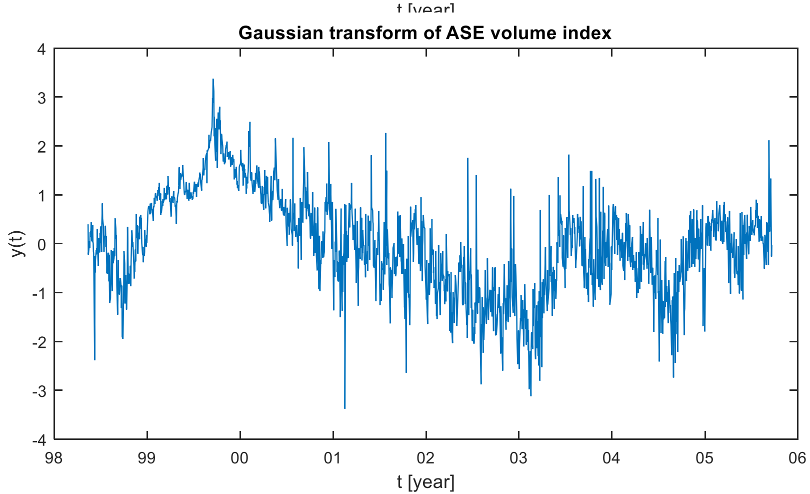


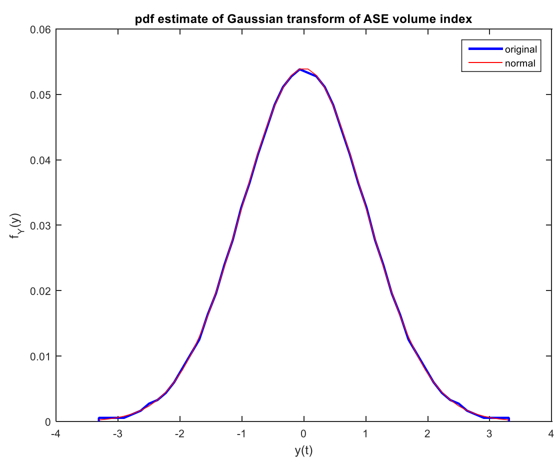
$$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$





$$X_t = \log(Y_t)$$





$$X_t = \Phi^{-1}\left(F_Y(Y_t)\right)$$

$\boxed{?}$

Απαλοιφή τάσης $\boxed{Y_t = \mu_t + X_t}$

μ_t: μέση τιμή ως συνάρτηση του t (αργά μεταβαλλόμενο μέσο επίπεδο τιμών)

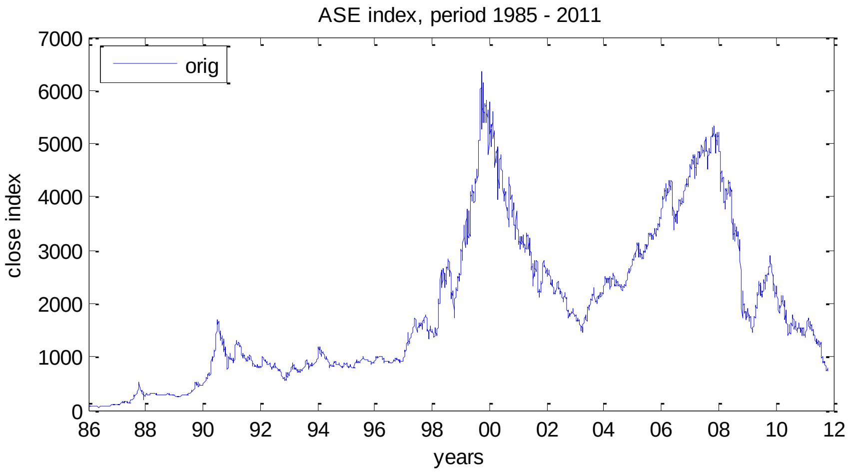
1. Καθοριστική τάση :
γνωστή ή εκτιμώμενη συνάρτηση του χρόνου $\mu_t = f(t)$

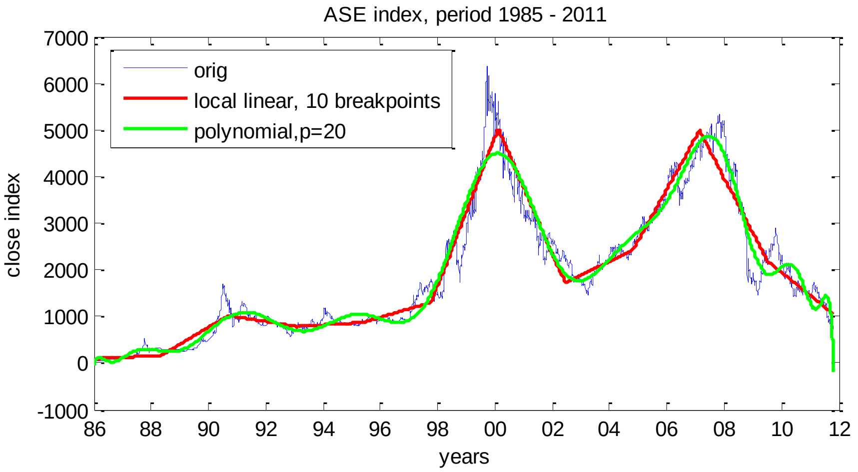
Παράδειγμα: πολυώνυμο βαθμού p

$$\mu_t = f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_p t^p$$

$$\boxed{X_t = Y_t - \mu_t}$$ $\{X_t\}$ στάσιμη

Δείκτης συναλλαγών Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών (ΧΑΑ)





2. Στοχαστική τάση

2α. Εξομάλυνση με φίλτρο κινούμενου μέσου

Απλό φίλτρο:
Κινούμενος μέσος όρος

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{2q+1}\sum_{j=-q}^{q} y_{t-j}$$

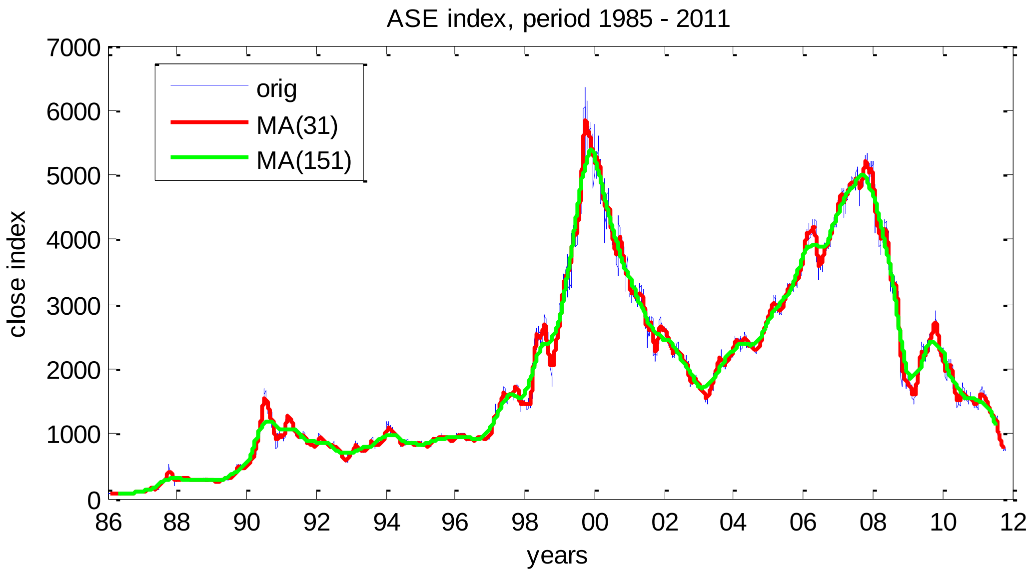
$$2q+1=3 \Rightarrow \hat{\mu}_t = \frac{1}{3}y_{t-1} + \frac{1}{3}y_t + \frac{1}{3}y_{t+1}$$

$$"2q+1"=4 \quad \boxed{?}$$

Γενικό φίλτρο:
Σταθμισμένος κινούμενος μέσος όρος

$$\hat{\mu}_t = \sum_{j=-q}^{q} a_j y_{t-j} \qquad \sum_{j=-q}^{q} a_j = 1$$

Δείκτης ΧΑΑ



Απλός κινούμενος μέσος:

$$a_j = \frac{1}{2q+1}, \; j = -q, \ldots, q$$

2b. Απαλοιφή τάσης με χρήση διαφορών (differencing)

- Τελεστής διαφοράς πρώτης τάξης (one lag difference or first difference)

$$\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1-B)Y_t$$

B: τελεστής υστέρησης (lag operator) $BY_t = Y_{t-1}$

- Τελεστής διαφοράς δεύτερης τάξης

$$\nabla^2 Y_t = \nabla(\nabla Y_t) = (1-B)(1-B)Y_t = (1-2B+B^2)Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

Αν η τάση είναι τοπικά γραμμική, απαλείφεται με τις πρώτες διαφορές:

$\mu_t = a_0 + a_1 t$ $\qquad \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \mu_t - \mu_{t-1} + X_t - X_{t-1}$

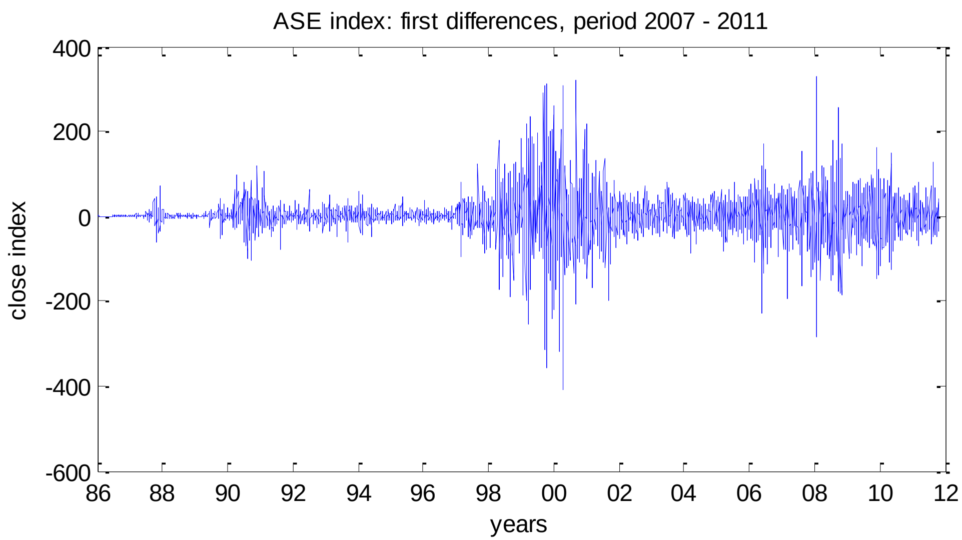
$\mu_t - \mu_{t-1} = a_0 + a_1 t - a_0 - a_1(t-1) = a_1$ «σταθερή τάση»!

Αν η τάση είναι τοπικά πολυώνυμο βαθμού p, απαλείφεται με χρήση του $\nabla^p Y_t$

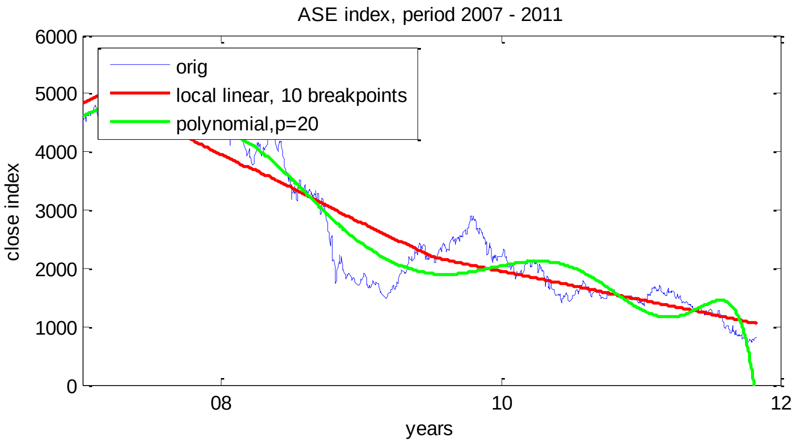
[δείξτε ότι $\nabla^p Y_t = p!c + X_t$]

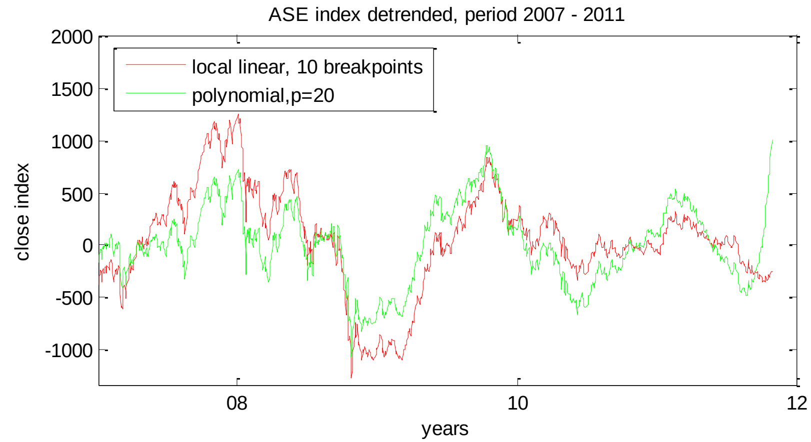
?

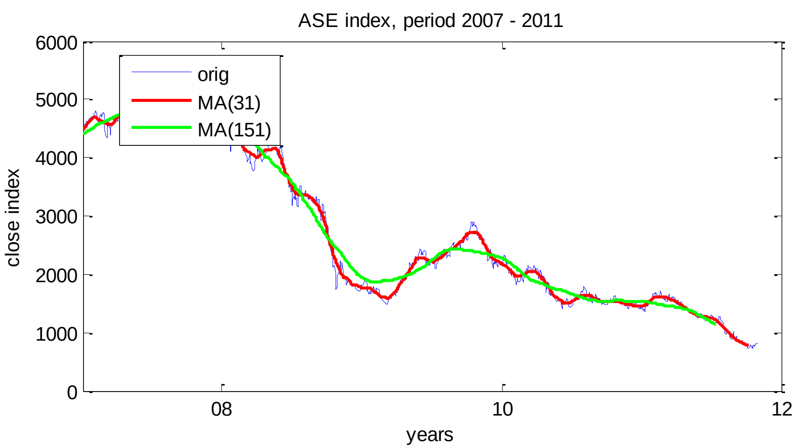
Δείκτης ΧΑΑ

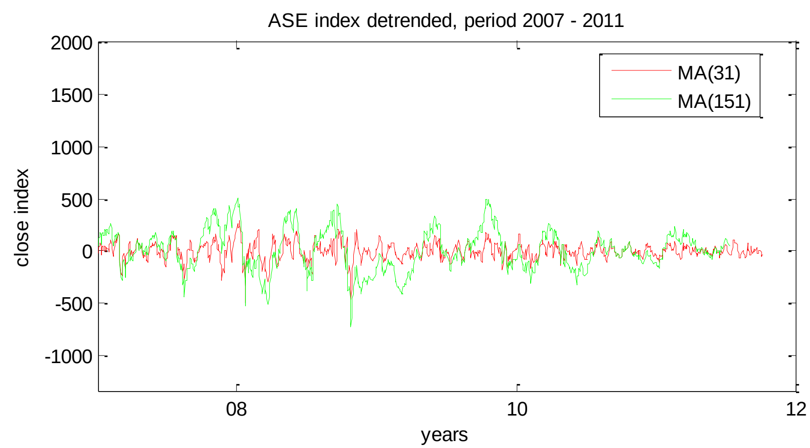


Ποια μέθοδος απαλοιφής τάσης είναι καλύτερη?

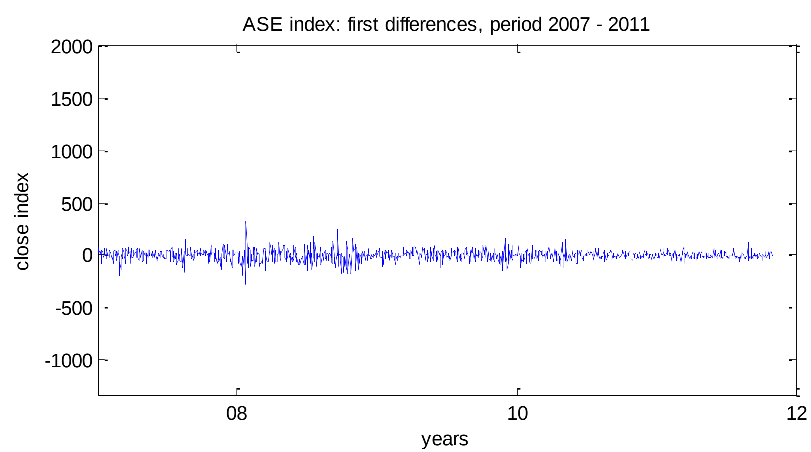








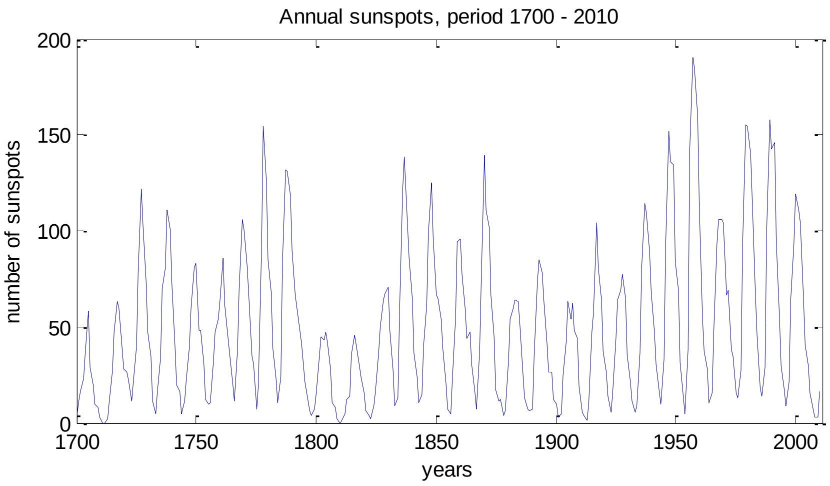
Εκτίμηση της τάσης

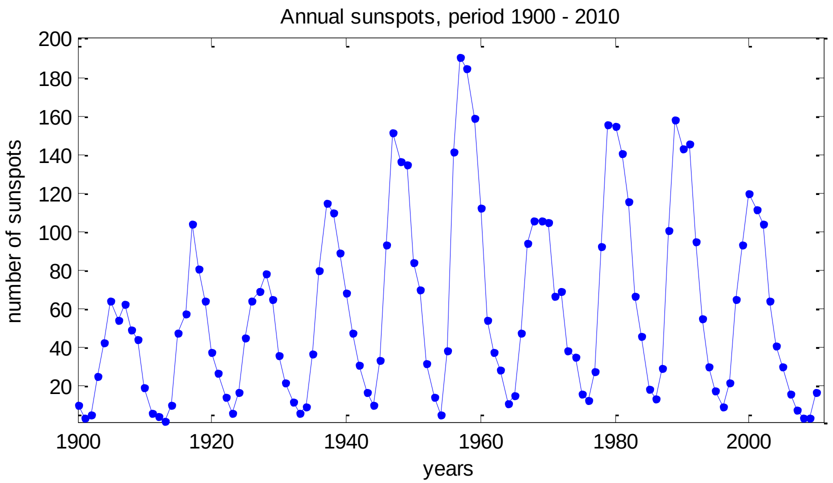


Απαλοιφή περιοδικότητας $\boxed{Y_t = s_t + X_t}$

s_t: περιοδική συνάρτηση του t με περίοδο d (περιλαμβάνει την εποχικότητα)

Ετήσιες ηλιακές κηλίδες





Περίοδος d και κατάλληλη συνάρτηση s_t

$\boxed{X_t = Y_t - s_t}$ $\{X_t\}$ στάσιμη

1. γνωστή ή εκτιμώμενη περιοδική συνάρτηση $s_t = f(t)$

2a. Εκτίμηση της s_i $i=1,\ldots,d$ **από μέσους όρους των στοιχείων της**

Περίοδος d γνωστή $k = [n/d]$ $\hat{s}_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_{i+jd}$

2b. Απαλοιφή περιοδικότητας με χρήση διαφορών (d-differencing)

$$\nabla_d Y_t = Y_t - Y_{t-d} = (1-B^d)Y_t$$

Απαλοιφή τάσης και περιοδικότητας

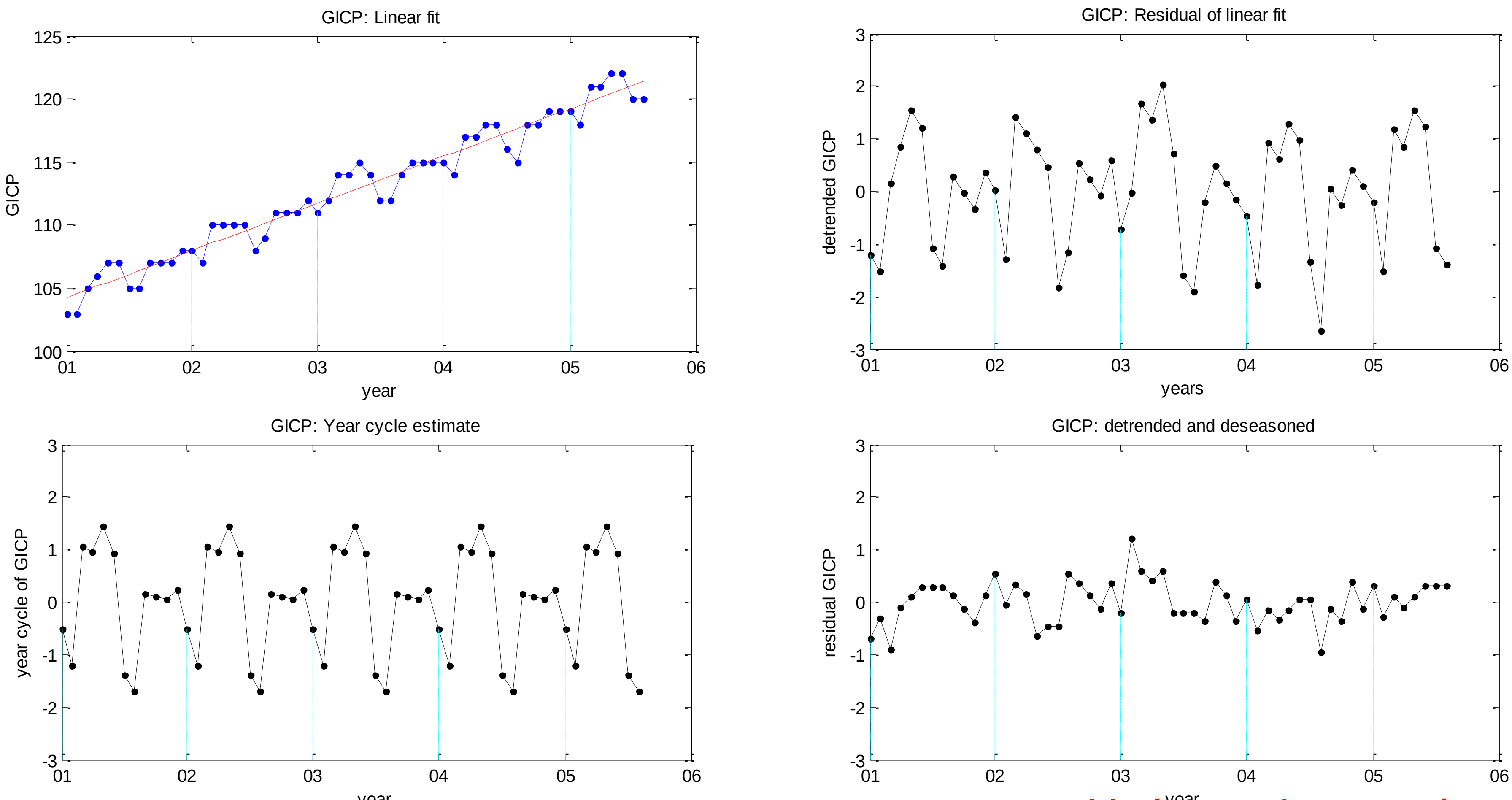
$$\boxed{Y_t = \mu_t + s_t + X_t}$$

1. Απαλοιφή τάσης $Y_t' = Y_t - \mu_t = s_t + X_t$

2. Απαλοιφή περιοδικότητας $X_t = Y_t' - s_t = Y_t - \mu_t - s_t$

Πρώτα απαλοιφή περιοδικότητας και μετά τάσης?

$\{X_t\}$: χρονοσειρά υπολοίπων (residual)



μη-στάσιμη $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ $\Rightarrow$ στάσιμη $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Υπάρχει πληροφορία στα υπόλοιπα?

Έλεγχος ανεξαρτησίας

Υποθέσεις

παρατηρούμενη στάσιμη χρονοσειρά → $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ → Είναι iid? **H_0**

χρονοσειρά υπολοίπων από απαλοιφή τάσης και/ή περιοδικότητας → $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ → Υπάρχουν συσχετίσεις? **H_0**

H_0: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι iid ⇒ **H_0**: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι λευκός θόρυβος

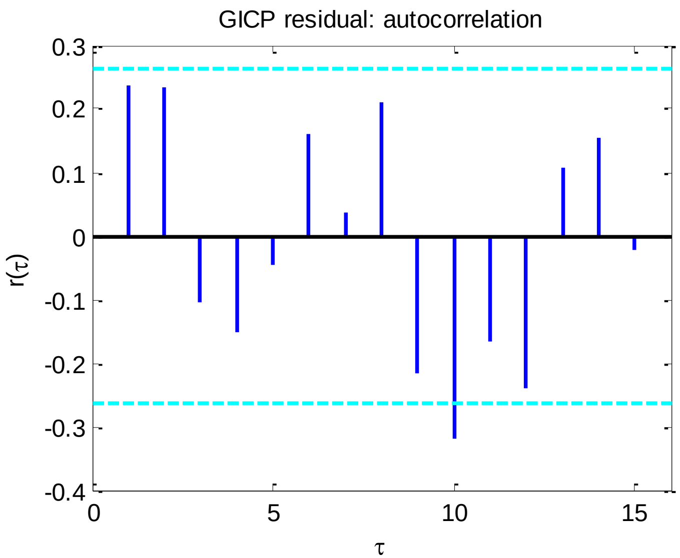
Έλεγχος σημαντικότητας αυτοσυσχέτισης

$\mathrm{H}_0 : \rho_\tau = 0 \qquad \mathrm{H}_1 : \rho_\tau \neq 0$

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ λευκός θόρυβος ⇒ $r_\tau \sim \mathrm{N}(0, \frac{1}{n})$

Απορριπτική περιοχή: $R = \left\{ r_\tau \;\middle|\; \left| \frac{r_\tau}{\sqrt{1/n}} \right| > z_{1-\alpha/2} \right\}$ για στάθμη σημαντικότητας α

Ζώνη μη-σημαντικής αυτοσυσχέτισης: $\pm z_{1-a/2} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ για α=0.05 $\simeq \pm \dfrac{2}{\sqrt{n}}$



Έλεγχος σημαντικότητας $\rho_\tau = 0$
για κάθε τ χωριστά

Σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05,
απορρίπτεται η H_0 για τ=10

Υπάρχουν συσχετίσεις στη χρονοσειρά GICP?

Έλεγχος ανεξαρτησίας Portmanteau

Ένας έλεγχος για $\rho_\tau = 0, \ \tau = 1, \ldots, k$

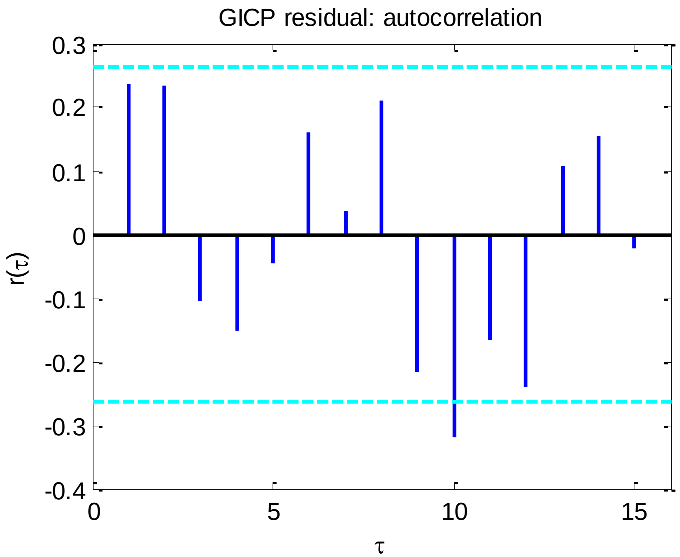
$$\mathrm{H}_0 : \rho_\tau = 0, \ \tau = 1, \ldots, k$$

Στατιστικό ελέγχου Q:

$$Q = n \sum_{\tau=1}^{k} r_\tau^2$$ Box-Pierce

$$Q = n(n+2) \sum_{\tau=1}^{k} r_\tau^2 / (n-j)$$ Ljung-Box

$Q \sim \mathcal{X}_k^2$ απορριπτική περιοχή $R = \left\{ Q > \mathcal{X}_{k;1-a}^2 \right\}$

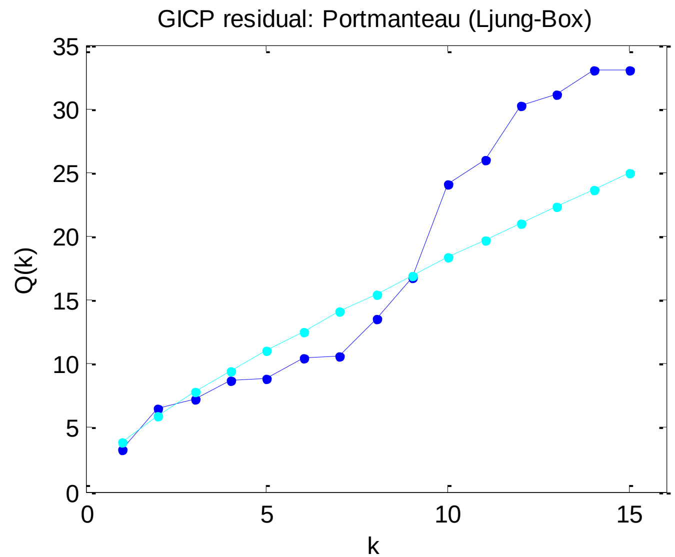


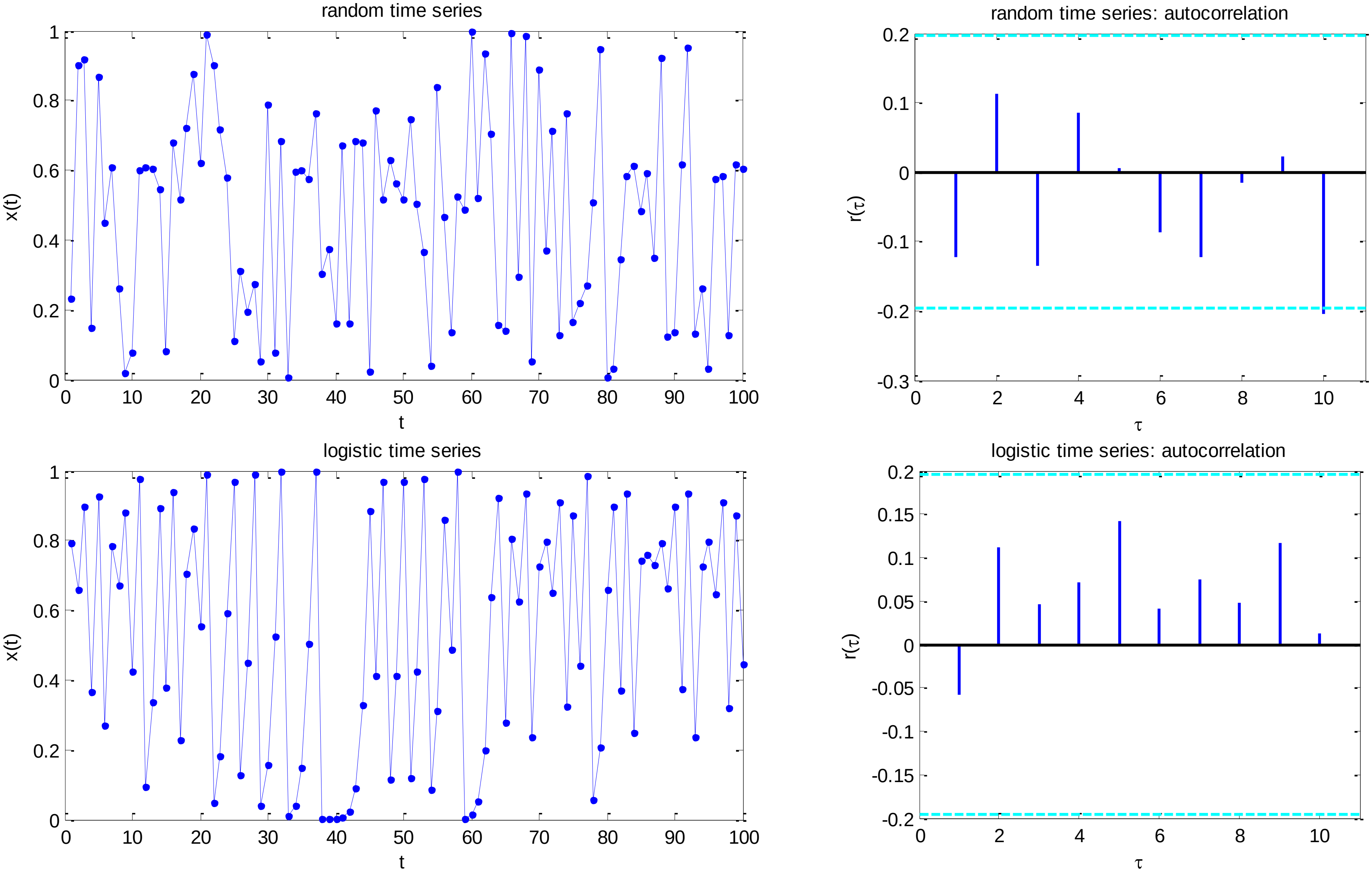
$k = 10$

$Q = 24.06$

$\mathcal{X}_{k;1-a}^2 = 18.30$

H_0 για τ=10 απορρίπτεται



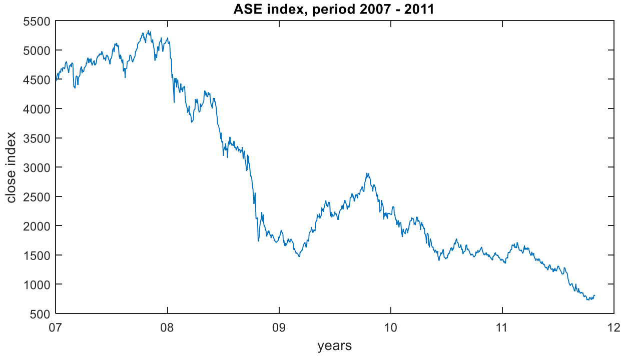


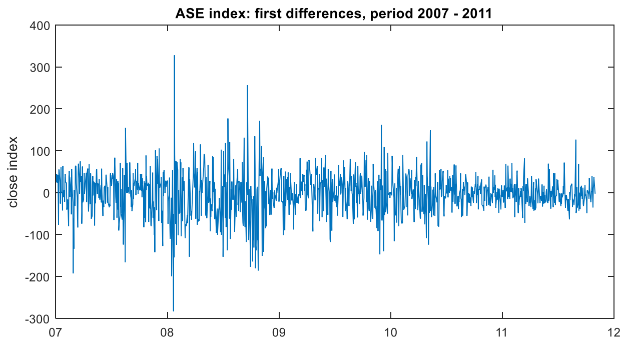
κατάλληλος έλεγχος ανεξαρτησίας ?

Άσκηση: Υπάρχουν συσχετίσεις στις αποδόσεις του δείκτη ΧΑΑ (περίοδος 2007-2011)?

Κατάλληλη στάσιμη χρονοσειρά: πρώτες διαφορές ή αποδόσεις?

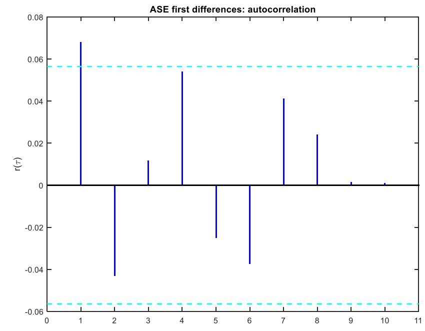
Υπάρχουν συσχετίσεις? … μη γραμμικές? $\mathrm{E}\left[X_t^2 X_{t-\tau}^2\right]$

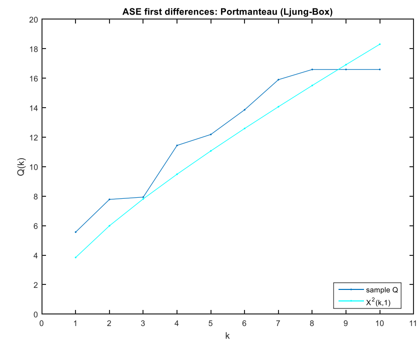


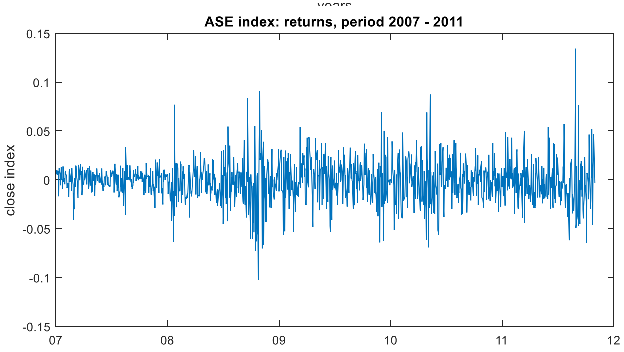


πρώτες διαφορές

$$x_t = y_t - y_{t-1}$$

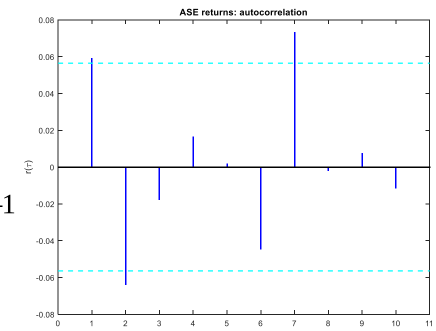


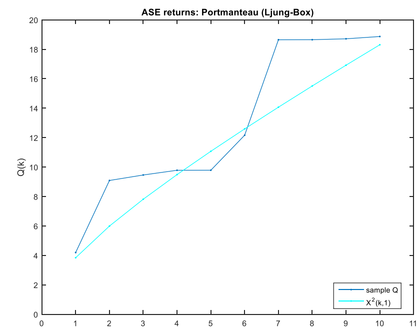


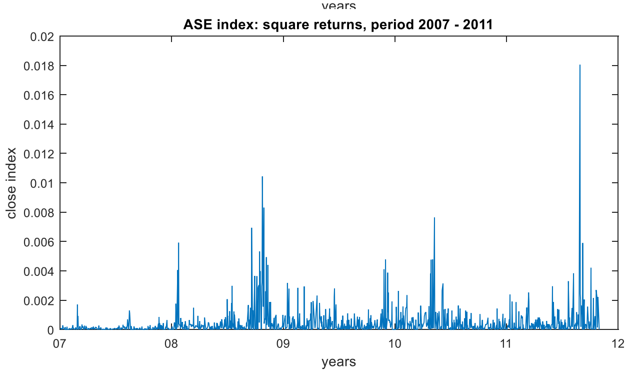


αποδόσεις

$$x_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}$$



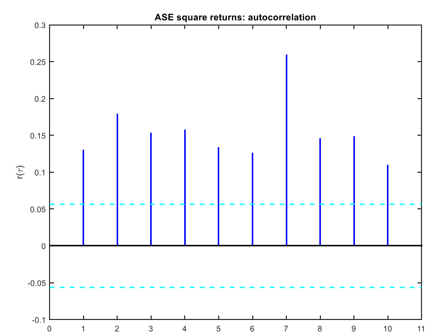


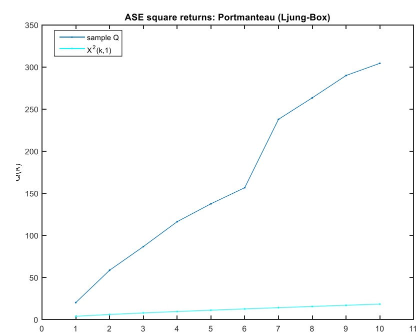


τετράγωνο αποδόσεων

$$x'_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}$$

$$x_t = (x'_t)^2$$





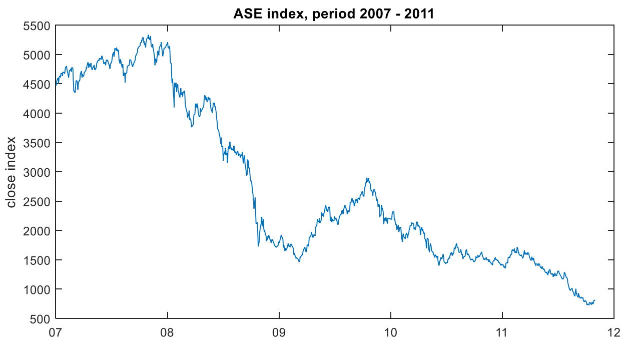
Άσκηση: Υπάρχουν συσχετίσεις στις αποδόσεις του δείκτη ΧΑΑ (περίοδος 2007-2011)? …μη γραμμικές?

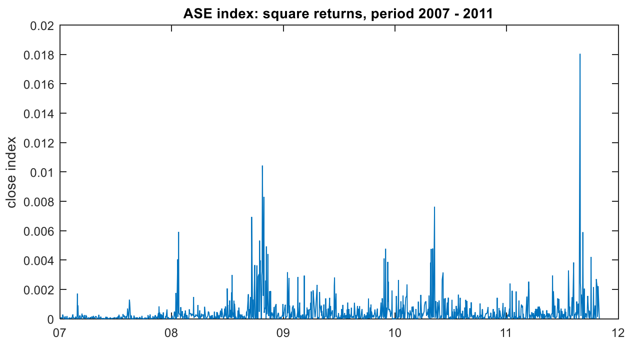
$$\mathrm{E}\left[X_t^2 X_{t-\tau}^2\right]$$

1 Αυτοσυσχέτιση λόγω μη-κανονικής κατανομής ? **Όχι**

2 Αυτοσυσχέτιση λόγω ύπαρξης δυναμικής **Ναι?**

Έλεγχος επαναδειγματοληψίας

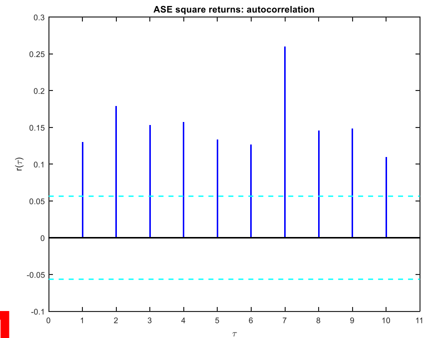


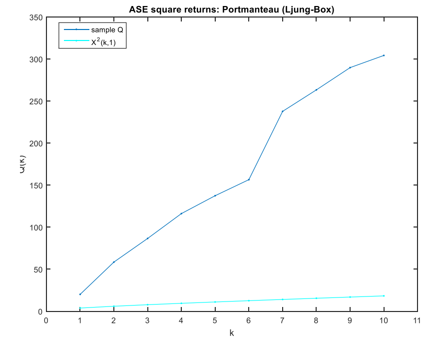


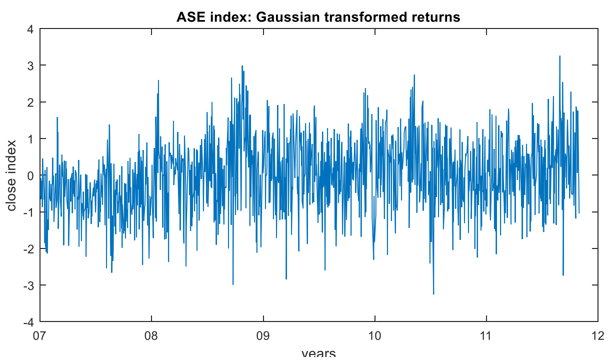
τετράγωνο αποδόσεων

$$x_t' = \ln y_t - \ln y_{t-1}$$

$$x_t = (x_t')^2$$





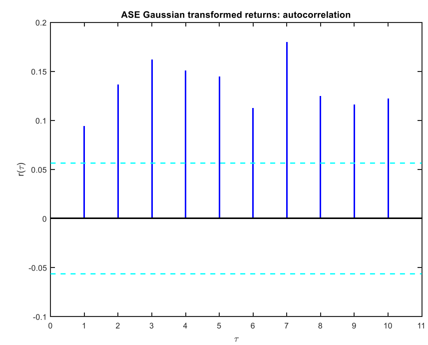


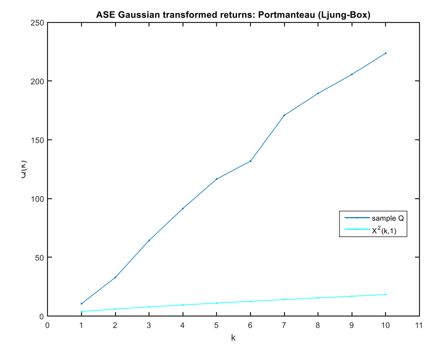
1

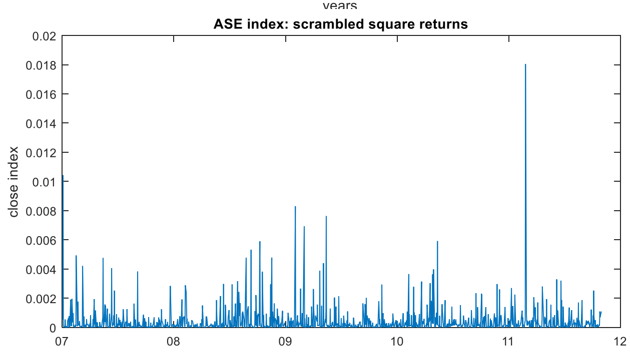
Gaussian μετασχηματισμός αποδόσεων

$$x_t' = \ln y_t - \ln y_{t-1}$$

$$x_t = \Phi^{-1}(F_{X'}(x_t'))$$

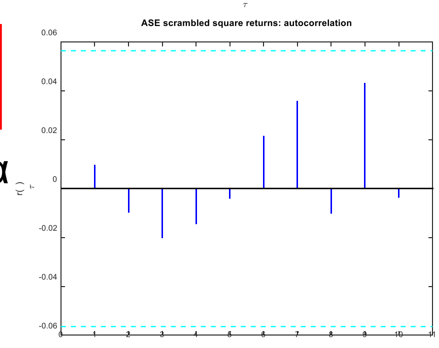


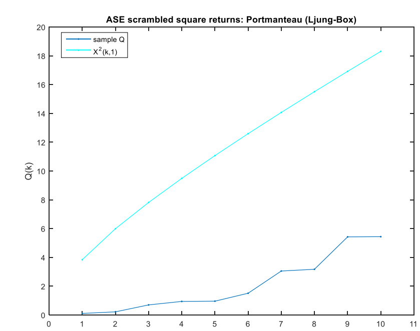




2

Τυχαίο ανακάτεμα των τιμών



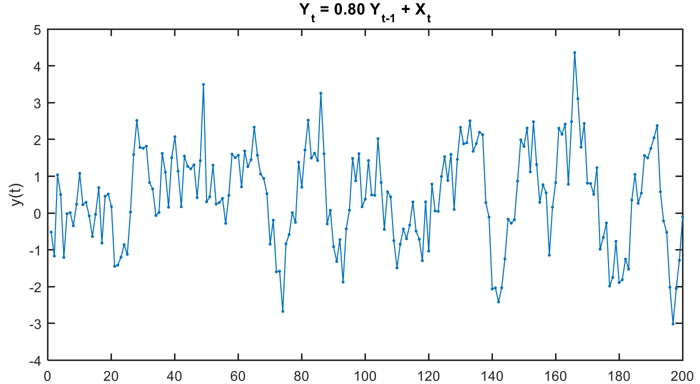


Έλεγχος μοναδιαίας ρίζας

τυχαίος περίπατος [random walk, RW] $Y_t = Y_{t-1} + X_t$ $X_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$

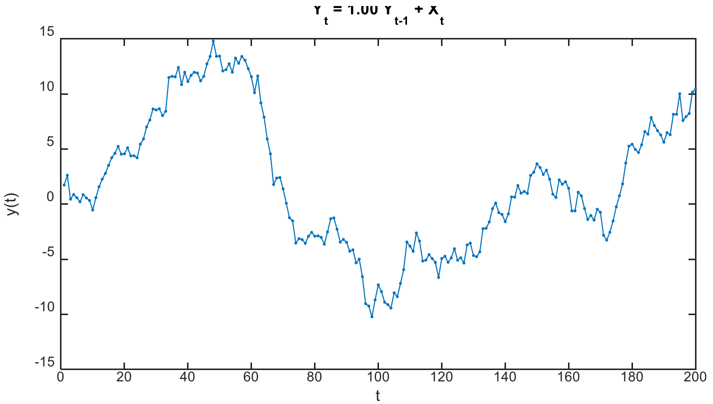
γενίκευση της στάθμισης στην προηγούμενη κατάσταση $Y_t = \phi Y_{t-1} + X_t$

$|\phi| < 1$



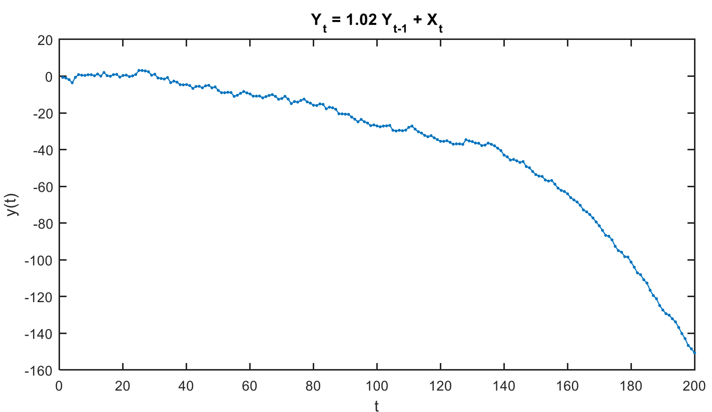
στάσιμη ? Ναι

$\phi = 1$



στάσιμη ? Όχι

$|\phi| > 1$



στάσιμη ? Όχι αασταθής

$Y_t = \phi Y_{t-1} + X_t \quad X_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$ $\qquad Y_t - \phi Y_{t-1} = X_t \Leftrightarrow (1-\phi \mathrm{B})Y_t = X_t$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $1-\phi\mathrm{B}=0$ Μπορεί να έχει ρίζα $\phi = 1$?

Έλεγχος μοναδιαίας ρίζας (unit root test)

H_0: $\phi = 1$ $\qquad \mathrm{H}_1$: $|\phi| < 1$

Απλή προσέγγιση: $Y_t = \phi Y_{t-1} + X_t \qquad (Y = \phi X + \varepsilon)$

έλεγχος για την παράμετρο κλίσης σε απλή γραμμική παλινδρόμηση

… αλλά ο έλεγχος (student) δεν είναι κατάλληλος (μεροληψία)

Έλεγχος Dickey-Fuller

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + X_t \Leftrightarrow Y_t - Y_{t-1} = \phi Y_{t-1} - Y_{t-1} + X_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = (\phi - 1)Y_{t-1} + X_t$$

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + X_t \qquad \delta = \phi - 1$$

H_0: $\delta = 0$ $\qquad \mathrm{H}_1$: $\delta < 0$

έλεγχος για την παράμετρο κλίσης δ στην απλή γραμμική παλινδρόμηση $\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + X_t$ $(Y = \delta X + \varepsilon)$

Στατιστικό ελέγχου $t_\delta = \dfrac{\hat{\delta} - \delta_0}{se(\hat{\delta})}$ $\qquad \delta_0 = 0$

Δεν ακολουθεί κατανομή student αλλά προτείνονται άλλες κρίσιμες τιμές για την απόφαση ελέγχου

Έλεγχος Dickey-Fuller με σταθερό όρο και τάση

$$Y_t = a_0 + a_1 t + \phi Y_{t-1} + X_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = a_0 + a_1 t + \delta Y_{t-1} + X_t$$

Ο έλεγχος γίνεται πάλι για H_0: $\delta = 0$

Έλεγχος augmented Dickey-Fuller