«Ποσοτικές Μέθοδοι στα Οικονομικά: Ανάλυση οικονομικών χρονοσειρών με γραμμικές μεθόδους» - Μέρος Α, *Διδάσκων: Κουγιουμτζής Δημήτρης*

"Quantitative Topics in Economics: Time Series Analysis with Linear Methods" – Part 1, *Lecturer: Dimitris Kugiumtzis*

http://users.auth.gr/dkugiu/Teach/TimeSeriesVolos/

Περιεχόμενα

- **Εισαγωγή στην ανάλυση χρονοσειρών, στασιμότητα και αυτοσυσχέτιση**
- **Μη-στάσιμη χρονοσειρά, έλεγχος μοναδιαίας ρίζας και έλεγχος ανεξαρτησίας**
- **Γραμμικές στοχαστικές διαδικασίες και μοντέλα**
- **Πρόβλεψη χρονοσειρών**
- **Στάσιμες πολυμεταβλητές χρονοσειρές και μοντέλα**
- **Μη-στάσιμες πολυμεταβλητές χρονοσειρές και μοντέλα**

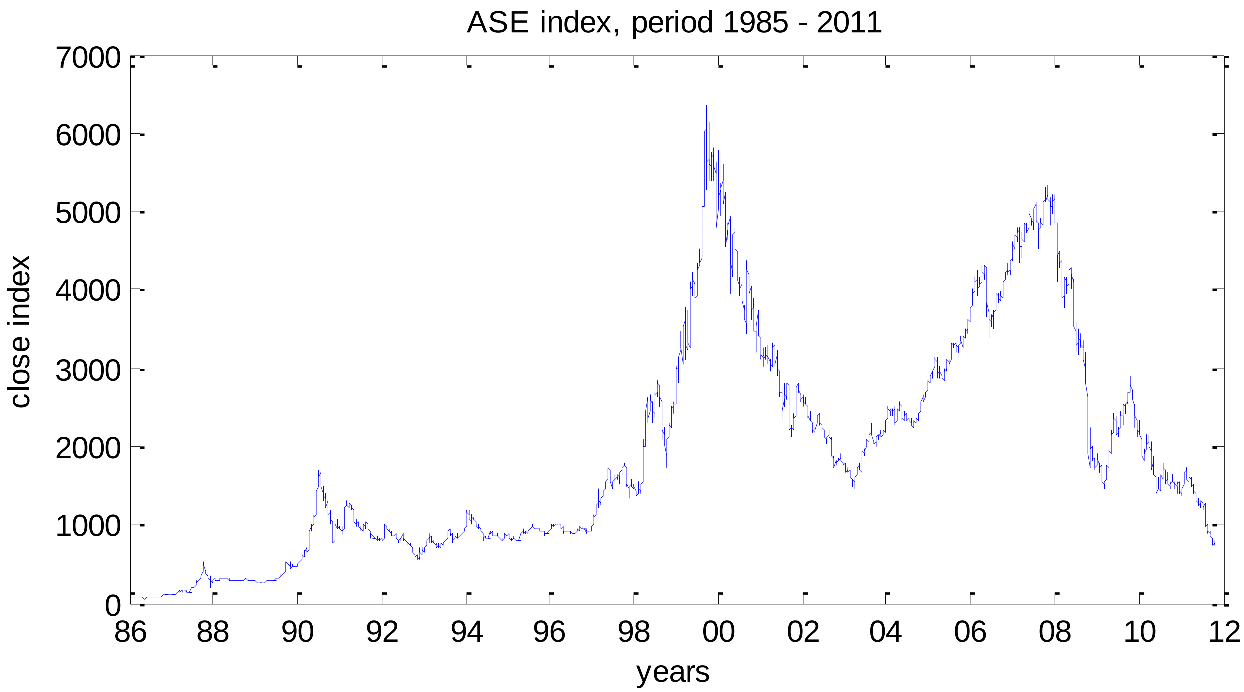
Βιβλιογραφία

- *Neusser K (2016). Time Series Econometrics, Springer.*
- *Verbeek M (2004). A Guide to Modern Econometrics, 4th Edition, Wiley.*
- *Mills TC and Markellos RN (2008). The Econometric Modelling of Financial Time Series, 3nd edition, Cambridge Press*
- *Κουγιουμτζής Δ. (2016). Ανάλυση Χρονοσειρών, Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος «Ανάλυση Χρονοσειρών» στο ΠΜΣ «Στατιστική και Μοντελοποίηση», Μαθηματικό Τμήμα, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.*

Μάθημα 1:

Εισαγωγή στην ανάλυση χρονοσειρών, στασιμότητα και αυτοσυσχέτιση

- Παραδείγματα πραγματικών χρονοσειρών
- Στασιμότητα και αυτοσυσχέτιση
- Κάποιες βασικές στοχαστικές διαδικασίες
- Δειγματική αυτοσυσχέτιση



μονοδιάστατη χρονοσειρά

μόνο μια χρονοσειρά

περιορισμένο μήκος

μη-στασιμότητα

θόρυβος

Ορισμοί / συμβολισμοί

Παρατηρούμενο μέγεθος → μεταβλητή [variable] X

Οι τιμές του παρατηρούμενου μεγέθους αλλάζουν με κάποια μικρή ή μεγάλη τυχαιότητα (στοχαστικότητα) → τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) [random variable] X

Οι παρατηρήσεις γίνονται συνήθως με συγκεκριμένο χρονικό βήμα → χρόνος δειγματοληψίας [sampling time].

Για κάθε χρονική στιγμή t θεωρούμε την τιμή x_t της τυχαίας μεταβλητής X.

Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής x_t για κάποια χρονική περίοδο n (σε μονάδες δειγματοληψίας) → (μονοδιάστατη) **χρονοσειρά** [(univariate) time series]

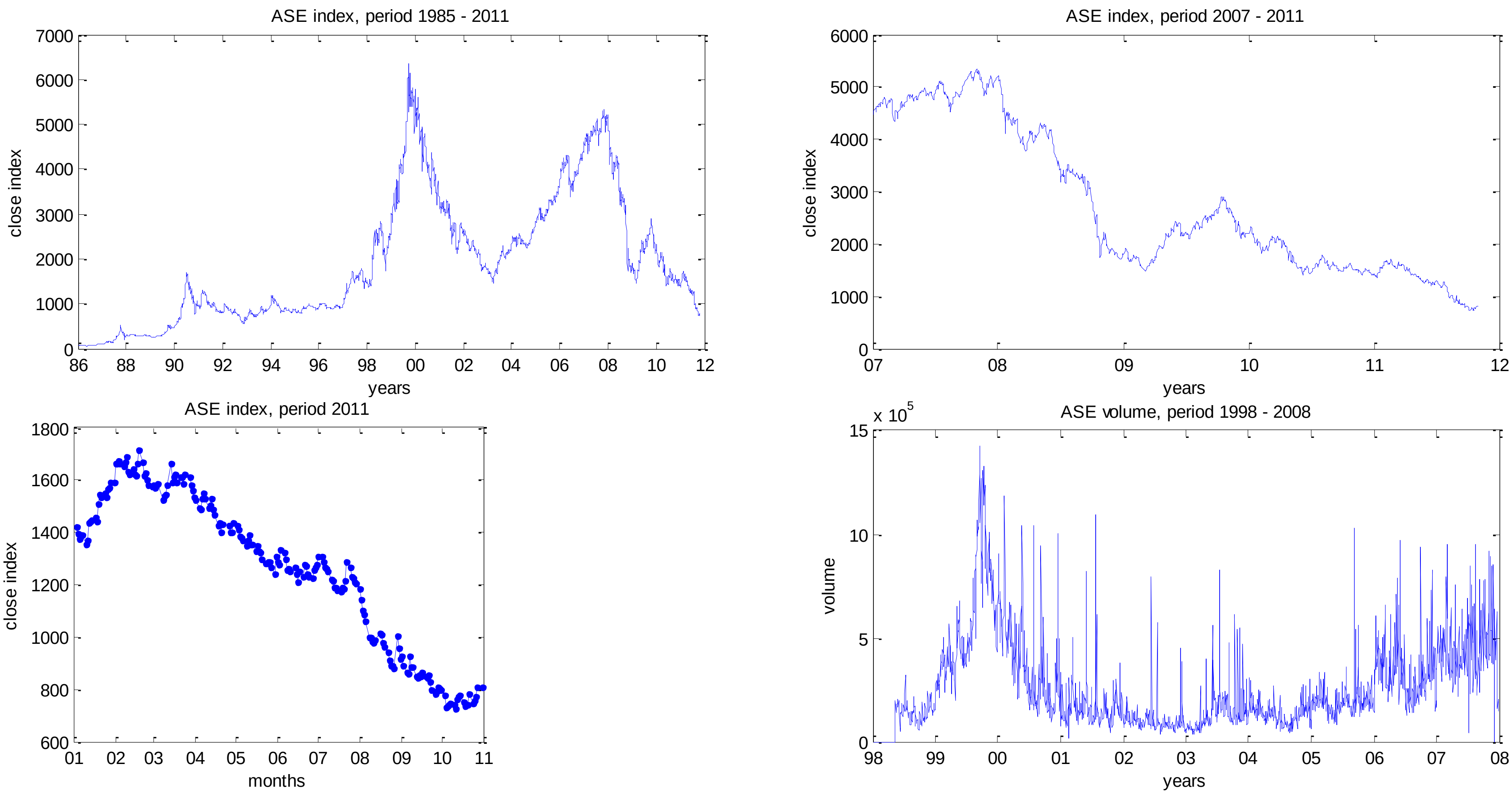
$$\{x_t\}_{t=1}^{n} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Αν υπάρχουν ταυτόχρονες παρατηρήσεις περισσότερων από μιας μεταβλητής → πολυδιάστατη χρονοσειρά [multivariate time series]

Στη μονοδιάστατη ή πολυδιάστατη χρονοσειρά εφαρμόζουμε μεθόδους και τεχνικές για να αντλήσουμε πληροφορίες για το σύστημα που την παράγει → **ανάλυση χρονοσειρών** [time series analysis]

Η χρονοσειρά μπορεί να θεωρηθεί ως πραγματοποίηση μιας στοχαστικής ή καθοριστικής διαδικασίας (δυναμικό σύστημα) $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

Δείκτης και όγκος συναλλαγών Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών (ΧΑΑ)



Πρόβλεψη ? Ποια είναι η τιμή του δείκτη αύριο? Μεθαύριο?

Δυναμικό σύστημα
Στοχαστική διαδικασία ? Ποιος είναι ο μηχανισμός της ελληνικής χρηματιστηριακής αγοράς?

Γενικός δείκτης τιμών καταναλωτή (GICP)

Τάση?

Εποχικότητα / περιοδικότητα?

Αυτοσυσχέτιση?

Αυτοπαλινδρόμηση?

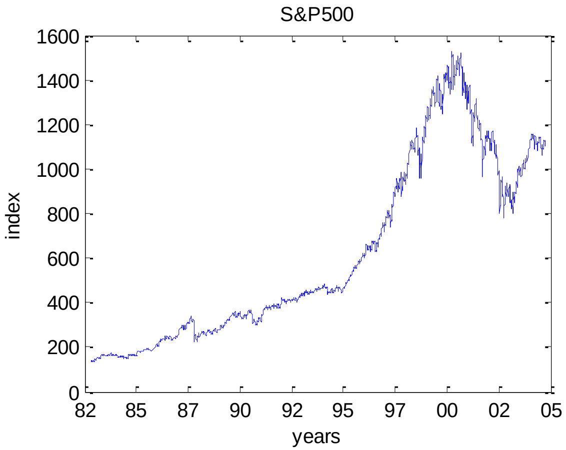
Πρόβλεψη ?

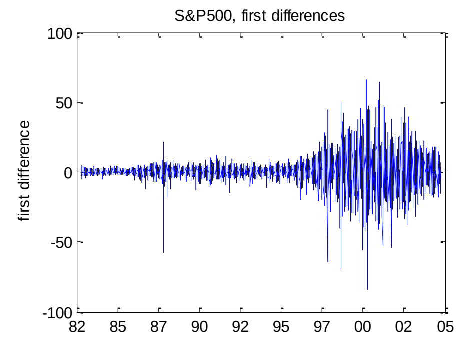
Στοχαστική τάση [stochastic trend]: τυχαία αργή μεταβολή μ_t

μετασχηματισμός

Y_t : η παρατήρηση ενός μεγέθους σε χρόνο t

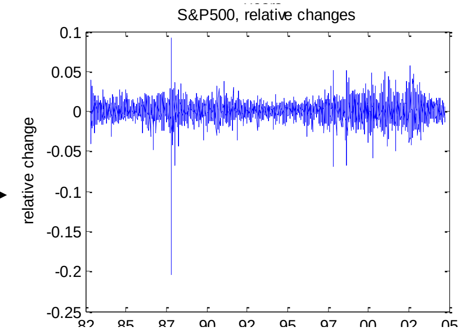
$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ χρονοσειρά





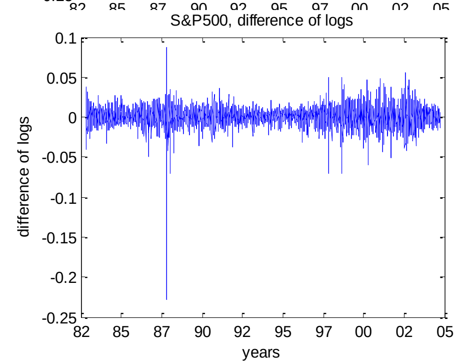
μεταβολή τιμής

$$x_t = y_t - y_{t-1}$$



σχετική μεταβολή τιμής

$$x_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_t}$$



μεταβολή λογαριθμού τιμής

$$x_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}$$

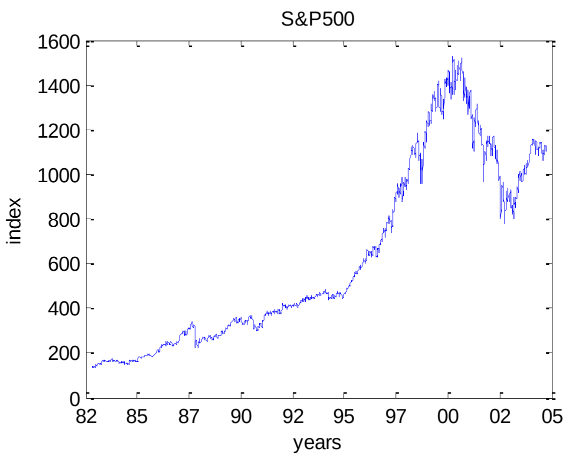
Χρονική συσχέτιση

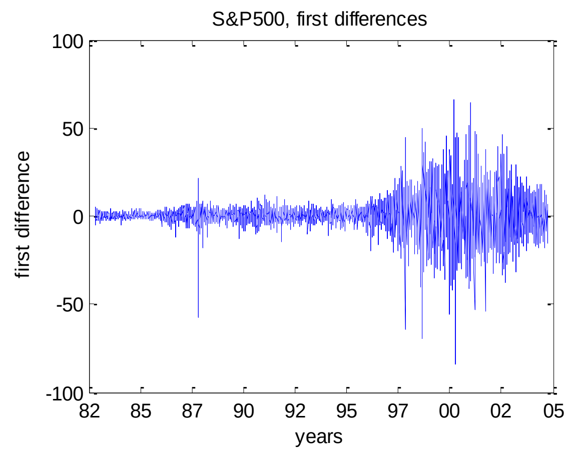
Στοχαστική διαδικασία

Y_t : η τιμή ενός μεγέθους

$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ χρονοσειρά

$\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

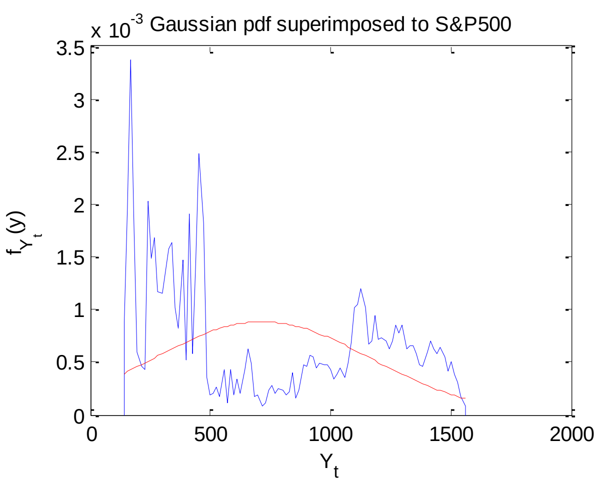




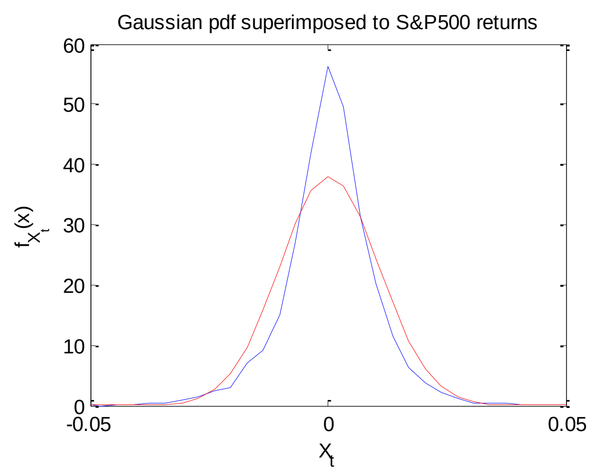
μεταβολή
τιμής

$$x_t = y_t - y_{t-1}$$

$f_{Y_t}(y)$



$f_{X_t}(x)$



Στατική περιγραφή …
→ περιθώρια κατανομή

Δυναμική περιγραφή?
→ Χρονική συσχέτιση

Στασιμότητα

Αυστηρή στασιμότητα [strict-sense stationarity]

Οι κατανομές είναι σταθερές στο χρόνο (ισοδύναμα όλες οι ροπές είναι σταθερές)

$$\forall t \in Z \qquad f_{Y_t}(y) = f_Y(y,t) = f_{Y_t}(y)$$

$$\forall t_1, t_2 \in Z \qquad f_{Y_{t_1},Y_{t_2}}(y_1,y_2) = f_{Y_t,Y_{t-\tau}}(y_1,y_2)$$

$$\forall t_1, t_2, t_3 \in Z \qquad f_{Y_{t_1},Y_{t_2},Y_{t_3}}(y_1,y_2,y_3) = f_{Y_t,Y_{t-\tau_1},Y_{t-\tau_2}}(y_1,y_2,y_3)$$

σταθερές $\forall t \in Z$

Ασθενή στασιμότητα [wide-sense stationarity]

Οι δύο πρώτες ροπές είναι σταθερές στο χρόνο

$$\mathrm{E}\left[Y_t\right] = \mu$$

$$\mathrm{E}\left[Y_{t_1}Y_{t_2}\right] = \mathrm{E}\left[Y_t, Y_{t-\tau}\right] = \kappa(t, t-\tau) = \kappa(\tau)$$

$$\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t, t-\tau) = \gamma(\tau)$$

σταθερές $\forall t \in Z$

σταθερή μέση τιμή και αυτοδιασπορά

και για $\tau=0$ $\quad \mathrm{E}\left[Y_t^2\right] = \kappa(0)$

$$\sigma^2 = \gamma(0) = \mathrm{E}\left[Y_t^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[Y_t\right]\right)^2 = \kappa(0) - \mu^2$$

σταθερή διασπορά

Αυτοσυσχέτιση

Στάσιμη χρονοσειρά $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

Αυτοδιασπορά $\gamma(\tau) = \mathrm{E}[(X_t-\mu)(X_{t-\tau}-\mu)] = \mathrm{E}[X_t X_{t-\tau}] - (\mathrm{E}[X_t])^2 = \kappa(\tau)-\mu^2$

Διασπορά $\sigma^2 = \gamma(0) = \mathrm{E}[X_t^2] - (\mathrm{E}[X_t])^2 = \kappa(0)-\mu^2$

Αυτοσυσχέτιση $\rho(\tau) = \dfrac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$

$\rho(0)=1$

Χρονική συσχέτιση μεταβλητών της $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ σε υστέρηση τ.
Μετράει τη «μνήμη» της $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

Συμβολισμός: $\gamma(\tau)=\gamma_\tau$ $\quad \rho(\tau)=\rho_\tau$

Παρατηρήσεις:

- $|\gamma_k| \le \gamma_0$ και $|\rho_k|\le 1$
- $\gamma_k = \gamma_{-k}$ και $\rho_k = \rho_{-k}$
- Πίνακας αυτοδιασπορών

$$\Gamma_n = \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \cdots & \cdots & \gamma_0 \end{vmatrix}$$

Πίνακας αυτοσυσχετίσεων

$$\mathrm{P}_n = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Κάποιες βασικές στοχαστικές διαδικασίες

1

$\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ **ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ.** [independent and identically distributed, **iid**]

$$P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n) = P(X_1 \le x_1)P(X_2 \le x_2)\ldots P(X_n \le x_n)$$

$$\mathrm{E}[X_t] = 0$$

2

$\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ **λευκός θόρυβος** [white noise, **WN**], ασυσχέτιστες τ.μ.

$$\mathrm{E}\left[X_i X_j\right] = \delta_{ij}\sigma^2$$

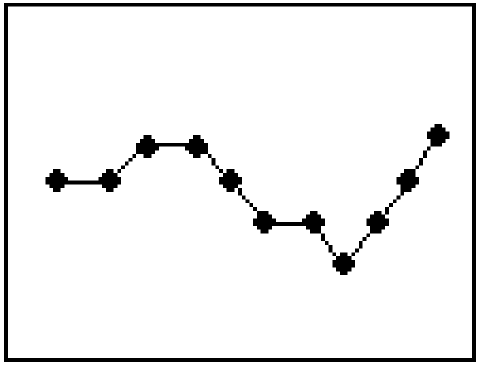
3

$\{Y_t\}_{t=1}^{\infty}$ **τυχαίος περίπατος** [random walk, RW]

$$Y_t = Y_{t-1} + X_t = X_1 + X_2 + \cdots X_t$$

$\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ iid $\quad \mathrm{E}[X_t] = 0 \quad \mathrm{E}\left[X_t^2\right] = \sigma^2$

$$\mathrm{E}[Y_{t+1} \mid Y_0, Y_1, \ldots, Y_t] = Y_t$$



$\mathrm{E}[Y_t] = 0 \qquad \mathrm{E}\left[Y_t^2\right] = t\sigma^2$ $\boxed{?}$

Η διασπορά αυξάνει γραμμικά με το χρόνο!

$\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ Γκαουσιανή (κανονική) στοχαστική διαδικασία

Για κάθε τάξη p: $f_{X_t, X_{t-\tau_1}, \ldots, X_{t-\tau_{p-1}}}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ είναι p-διάστατη Γκαουσιανή κατανομή

Η κανονική κατανομή καθορίζεται πλήρως από τις δύο πρώτες ροπές

$$\Downarrow$$

αυστηρή στασιμότητα ≡ ασθενής στασιμότητα

Παράδειγμα

Στοχαστική διαδικασία: $X_t = 0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$

Είναι ασθενώς στάσιμη;

- $\mathrm{E}[X_t] = \mathrm{E}[0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t] = 0$
- $\mathrm{E}[X_t X_{t+\tau}] = \mathrm{E}\left[(0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)(0.5\varepsilon_{t+\tau-1} + \varepsilon_{t+\tau})\right]$ $\boxed{?}$

$\tau = 0 \qquad \mathrm{E}[X_t X_t] = \mathrm{E}\left[(0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)(0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)\right] = \ldots = 1.25$

$\tau = 1 \qquad \mathrm{E}[X_t X_{t+1}] = \mathrm{E}\left[(0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)(0.5\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})\right] = \ldots = 0.5$

$\tau = 2 \qquad \mathrm{E}[X_t X_{t+2}] = \mathrm{E}\left[(0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)(0.5\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2})\right] = \ldots = 0$

Οι ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης δεν εξαρτώνται από το χρόνο t.

Δειγματική αυτοδιασπορά / αυτοσυσχέτιση

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ χρονοσειρά

Δειγματική μέση τιμή $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t$

- αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής μ της χρονοσειράς $\boxed{?}$

Δειγματική αυτοδιασπορά $c(\tau) = \frac{1}{n}\sum_{t=\tau+1}^{n}(x_t x_{t-\tau} - \bar{x}^2)$ $\quad \tau = 0, 1, \ldots, n-1$

$$c(0) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t^2 - \bar{x}^2)$$

Συμβολισμός
$c(\tau) \equiv c_\tau$

Άλλη εκτίμηση αυτοδιασποράς $c'(\tau) = \frac{1}{n-\tau}\sum_{t=\tau+1}^{n}(x_t x_{t-\tau} - \bar{x}^2)$

Μεροληπτικοί εκτιμητές:

$$\mathrm{E}[c_\tau] \cong \gamma_\tau - \frac{\tau}{n}\gamma_\tau - \left(\frac{n-\tau}{n}\right)\mathrm{Var}[\bar{x}]$$

η μεροληψία αυξάνει με την υστέρηση τ

$$\mathrm{E}[c'_\tau] \cong \gamma_\tau - \mathrm{Var}[\bar{x}]$$

Δειγματική αυτοσυσχέτιση $r(\tau) = \frac{c(\tau)}{c(0)}$ $\quad r(0) = 1$

Συμβολισμός
$r(\tau) \equiv r_\tau$

Για μεγάλο n: $r_\tau \sim \mathrm{N}(\rho_\tau, \mathrm{Var}[r_\tau])$

$$\mathrm{Var}[r_\tau] \cong \frac{1}{n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\rho_m^2 + \rho_{m+\tau}\rho_{m-\tau} + 2\rho_\tau^2\rho_m^2 - 4\rho_\tau\rho_m\rho_{m-\tau})$$

τύπος Bartlet

$$\mathrm{Var}[r_\tau] \cong \frac{1}{n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\rho_m^2$$ πολύ μεγάλο n

Αυτοσυσχέτιση λευκού θορύβου

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ χρονοσειρά λευκού θορύβου $\quad \rho_\tau = 0, \;\; \forall \tau \neq 0$

$$r_\tau \sim \mathrm{N}(0, \frac{1}{n}) \quad \boxed{?}$$

Έλεγχος σημαντικότητας αυτοσυσχέτισης

$$\mathrm{H}_0 : \rho_\tau = 0 \qquad \mathrm{H}_1 : \rho_\tau \neq 0$$

Απορριπτική περιοχή: $R = \left\{ r_t \;\middle|\; \left| \frac{r_\tau}{\sqrt{1/n}} \right| > z_{1-\alpha/2} \right\}$ για στάθμη σημαντικότητας α

Ζώνη μη-σημαντικής αυτοσυσχέτισης: $\pm z_{1-a/2} \frac{1}{\sqrt{n}}$ για α=0.05 $\simeq \pm \frac{2}{\sqrt{n}}$

Παράδειγμα

Για μια χρονοσειρά 200 παρατηρήσεων δίνονται οι 10 πρώτες αυτοσυσχετίσεις

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-0.38	-0.28	0.11	-0.08	0.02	0.00	0.01	0.07	-0.08	0.05

Υποθέτοντας ότι η χρονοσειρά είναι τυχαία (H_0:$\rho=0$): $\mathrm{Var}[r_\tau] \cong \frac{1}{200} = 0.005$

για α=0.05, το 95% των αυτοσυσχετίσεων αναμένουμε να βρίσκεται στο διάστημα

$$\pm 1.96 * \frac{1}{\sqrt{200}} = \pm 1.96 * 0.07 = \pm 0.139$$

$\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$ και $\rho_\tau = 0$ για $\tau = 3,4,\ldots$