

Χρονοσειρές - Μάθημα 7

Μη-γραμμική ανάλυση χρονοσειρών

Γραμμική ανάλυση / Γραμμικά μοντέλα

αυτοσυσχέτιση



AR μοντέλο

$$\text{ARMA}(p,q) \text{ μοντέλο } x_t = \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} + z_t + \theta_1 z_{t-1} + \dots + \theta_q z_{t-q}$$

Πλεονεκτήματα:

1. Απλά
2. Κανονική διαδικασία, ανεπτυγμένη θεωρία για στοχαστικές διαδικασίες και στατιστική συμπερασματολογία
3. Χρήσιμα στις εφαρμογές

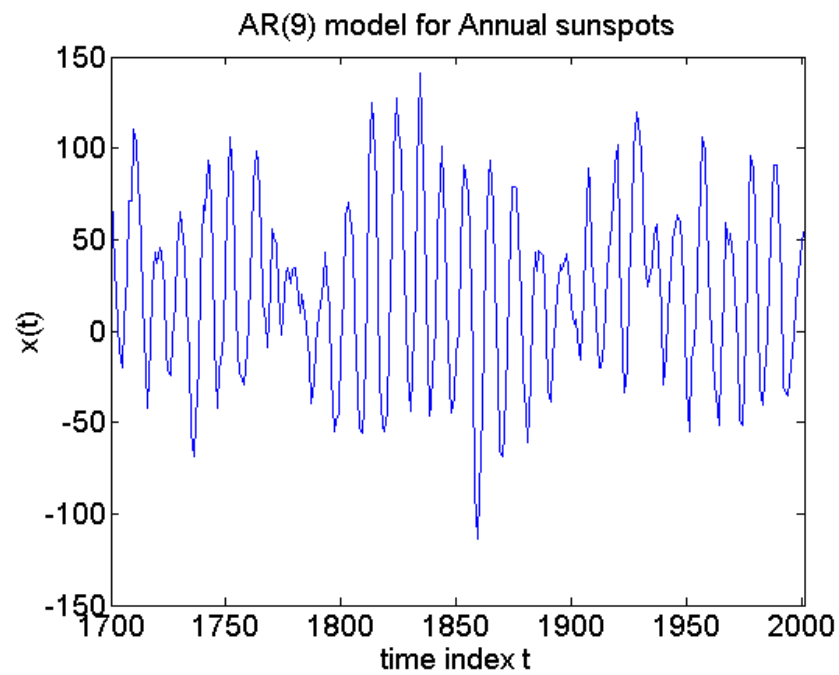
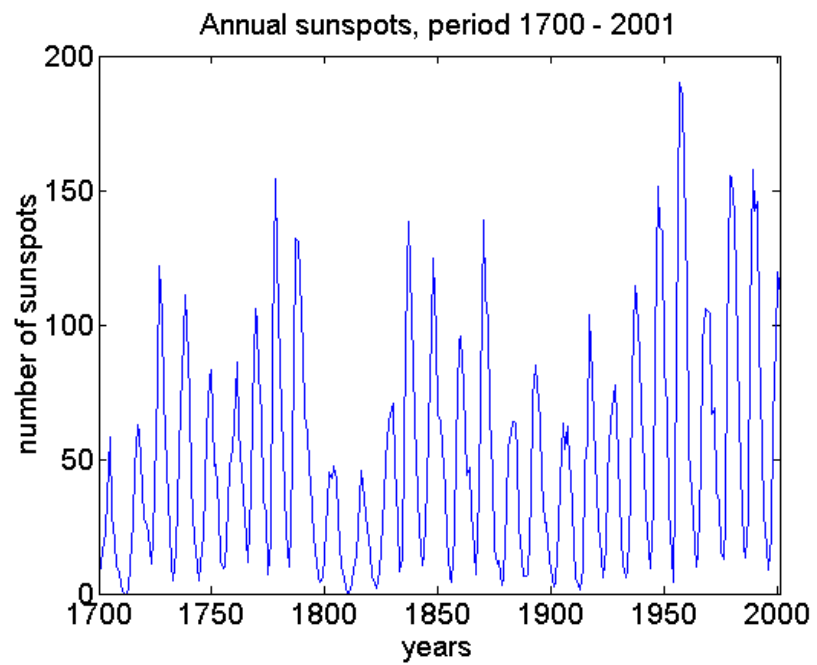
Μειονεκτήματα:

1. Δεν εξηγούν μη-κανονικές μορφές της χρονοσειράς
 - ασυμμετρία δεδομένων (κατανομής)
 - μη-αντιστρεψιμότητα στο χρόνο
 - «ξεσπάσματα»
2. Καθοριστικό μέρος:
 - σταθερό οριακό σημείο
 - ασταθές σύστημα
 - ταλάντωση μεταξύ σημείων

Μη-γραμμική ανάλυση χρονοσειρών

περιγραφή μη-κανονικών χαρακτηριστικών

εξήγηση / εντοπισμός σύνθετων καθοριστικών δομών



Γενικό μη-γραμμικό
μοντέλο

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}, \varepsilon_t)$$

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}) + \varepsilon_t$$

Προσθετικός
θόρυβος

$$\mathbf{X}_{t-1} = [X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}] \in \mathbb{R}^p$$

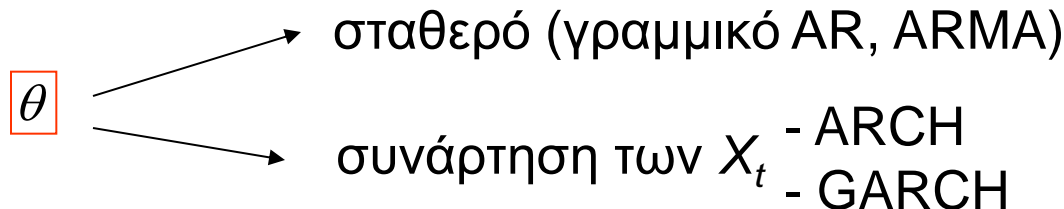
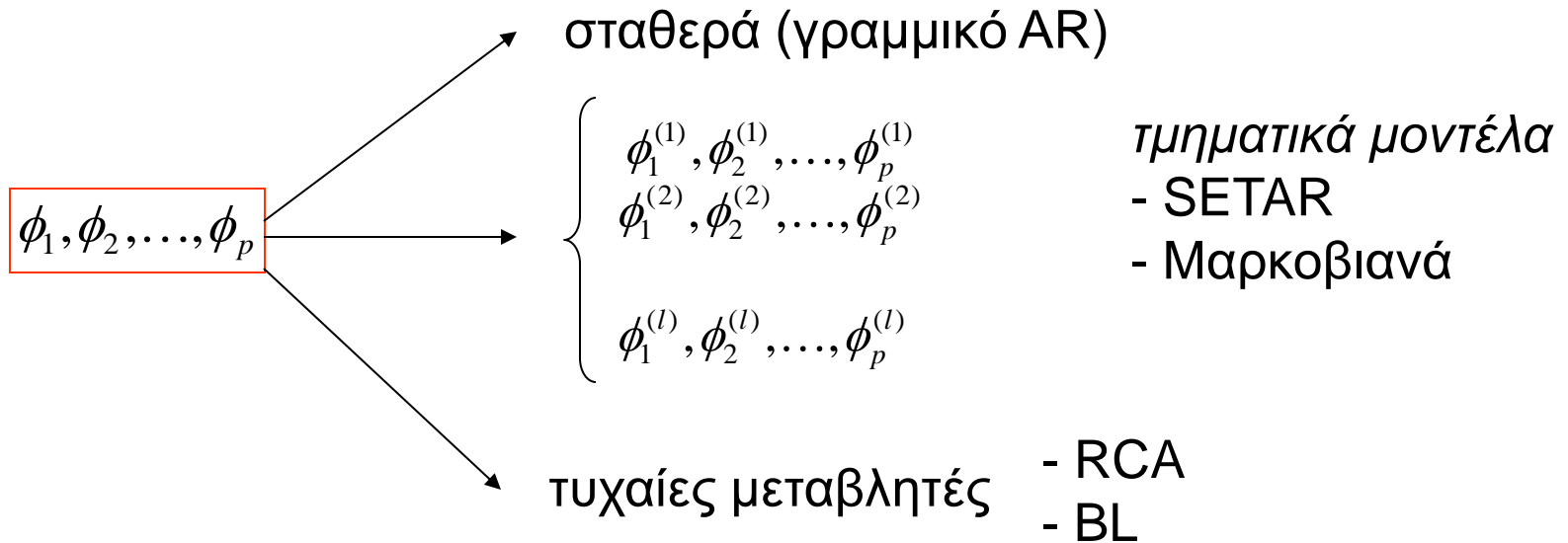
$$f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$$

***f* ?**

Γραμμικό AR
μοντέλο

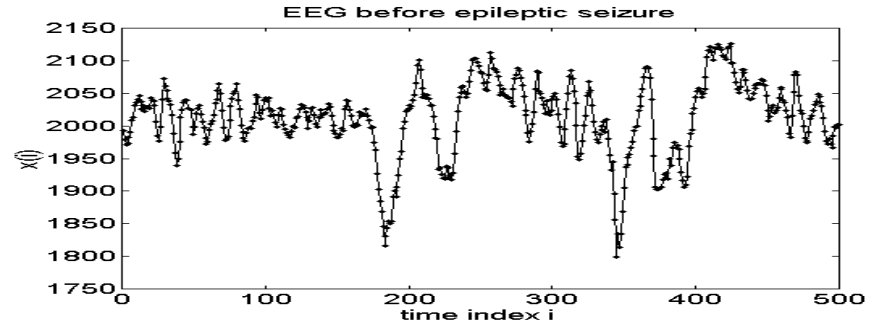
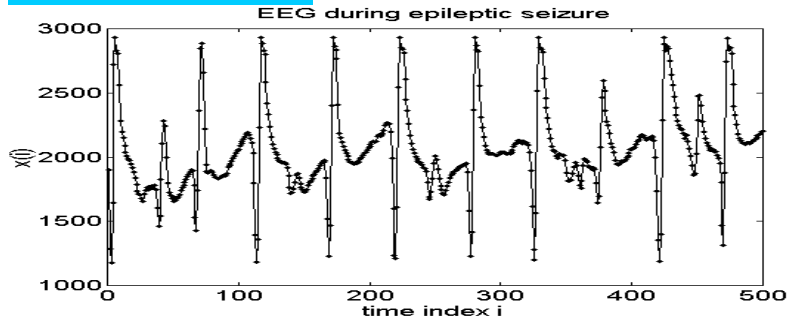
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \theta \varepsilon_t$$

Γενικεύσεις / επεκτάσεις του γραμμικού AR μοντέλου

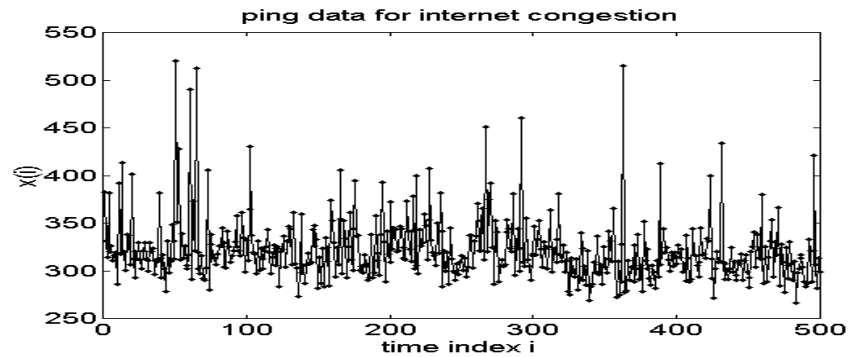
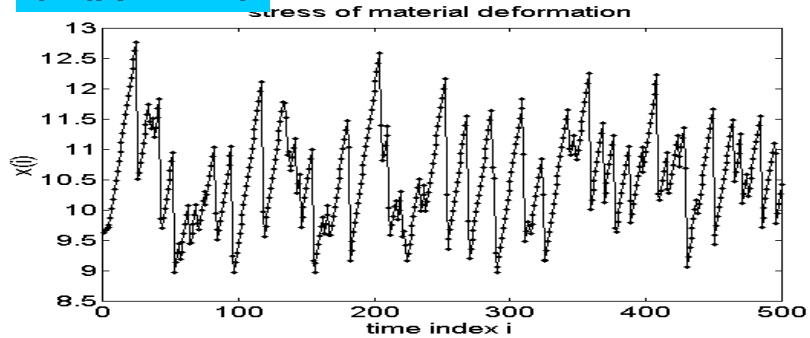


Πραγματικές χρονοσειρές

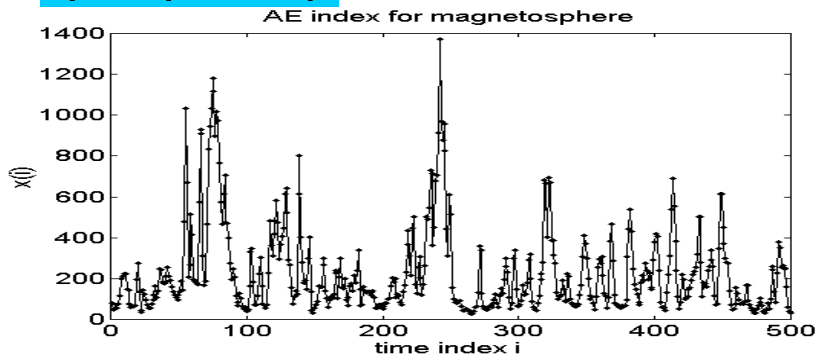
φυσιολογία



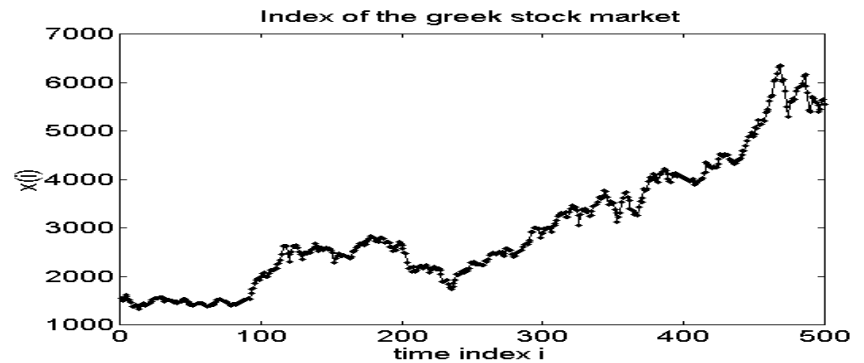
μηχανική



γεωφυσική



οικονομία



Μη-γραμμική ανάλυση χρονοσειρών και δυναμικά συστήματα

Χρονοσειρά x_1, x_2, \dots, x_n

Υπόθεση:

➔ Παρατήρηση: $x_t = h(s_t)$ $s_t \in \mathbb{R}^d$: τροχιά δυναμικού συστήματος
 $h: \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ συνάρτηση παρατήρησης

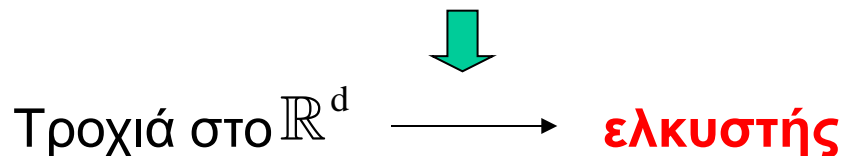
➔ Μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα $s_t = f^t(s_0)$

s_0 : το διάνυσμα θέσης για χρόνο 0

$f^t: \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ συνάρτηση του συστήματος

t : συνεχής ή διακριτός χρόνος

Για χρονοσειρές ➔ συστήματα απώλειας ενέργειας

Τροχιά στο \mathbb{R}^d  **ελκυστής**

Ελκυστής:

- ευσταθές σημείο ισορροπίας
- πεπερασμένο σύνολο σημείων ισορροπίας
- οριακός κύκλος
- τόρος
- παράξενος ελκυστής

μπορεί να σχηματιστεί
από γραμμικό σύστημα

δε μπορεί να σχηματιστεί
από γραμμικό σύστημα

αυτό-ομοιότητα – μορφοκλασματικά

ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες

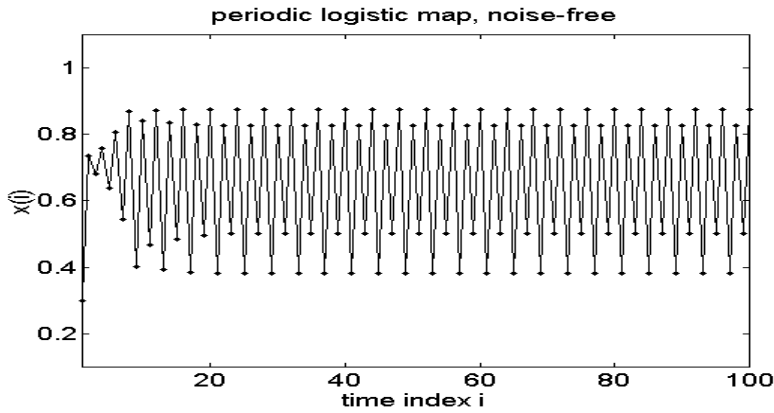


χάος

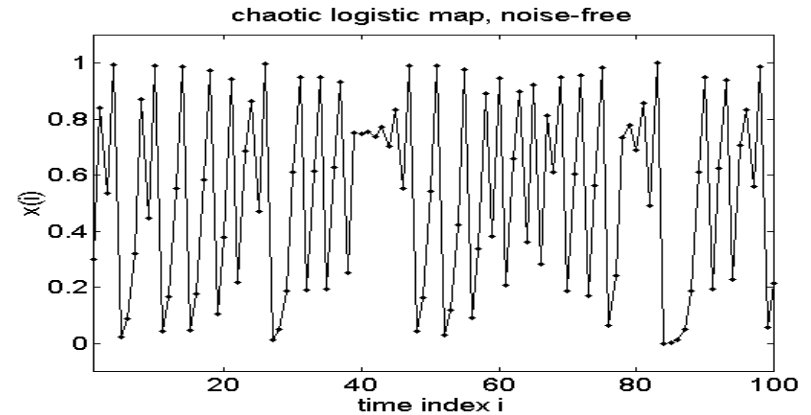
Μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα, απεικονίσεις (διακριτός χρόνος)

Λογιστική απεικόνιση $s_i = a s_{i-1}(1 - s_{i-1})$

περιοδικό $a=3.52$

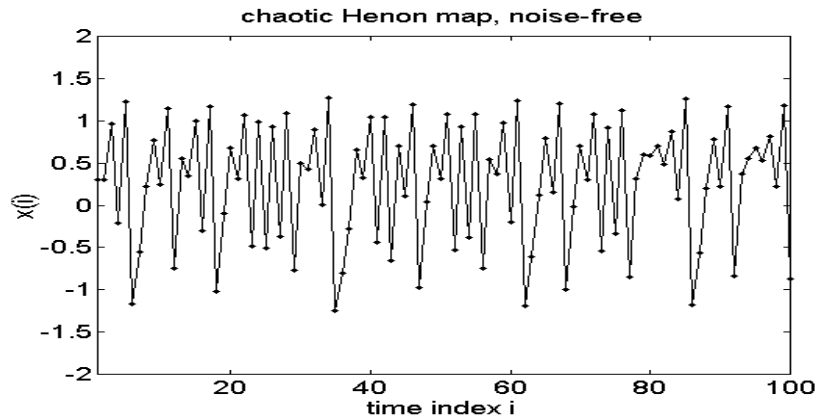


χαοτικό $a=4$



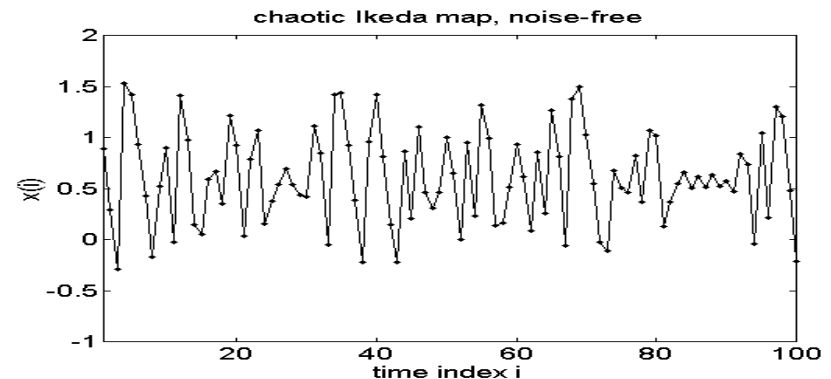
χαοτική απεικόνιση **Henon**

$$s_i = 1 - 1.4 s_{i-1}^2 + 0.3 s_{i-2}$$



χαοτική απεικόνιση **Ikeda**

$$s_k = 1 + 0.9 s_{k-1} \exp \left(0.4i - \frac{6i}{1 + |s_{k-1}|^2} \right)$$



Μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα,ροές (συνεχής χρόνος)

Σύστημα Lorenz:

$$\dot{s}_1 = a(s_2 - s_1)$$

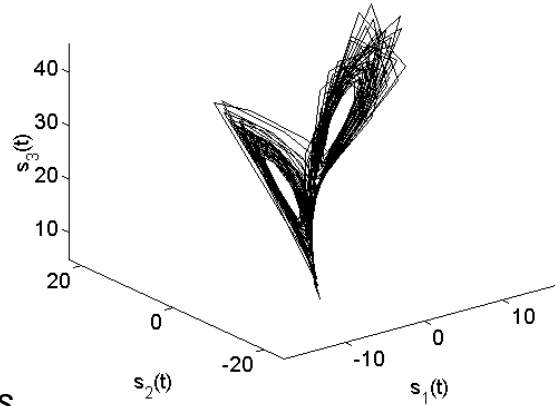
$$\dot{s}_2 = bs_1 - s_2 - s_1s_3$$

$$\dot{s}_3 = -cs_3 + s_1s_2$$

$$a = 10 \quad b = 28 \quad c = \frac{8}{3}$$

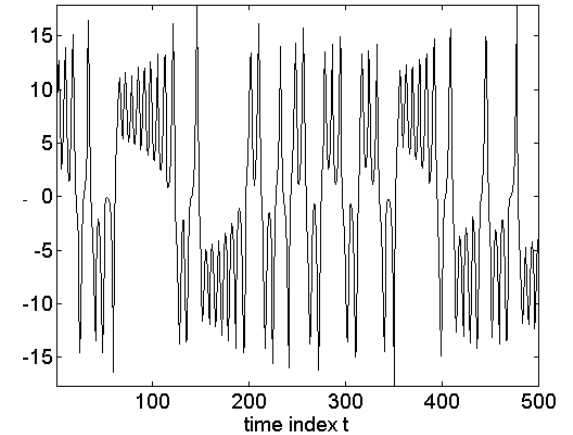
s_1, s_2, s_3

Lorenz system, $\tau_s = 0.1 \text{ sec}$

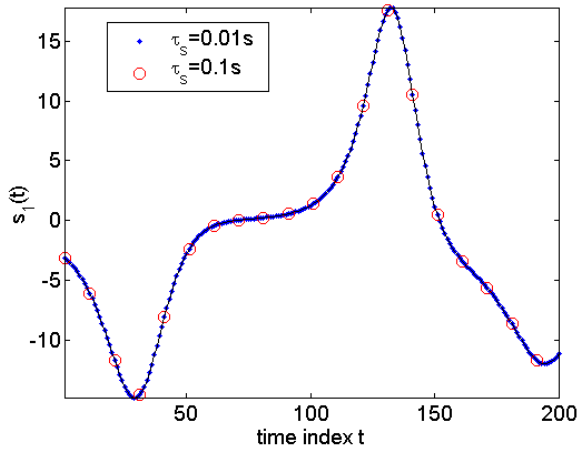


s_1

Lorenz system, s_1 variable

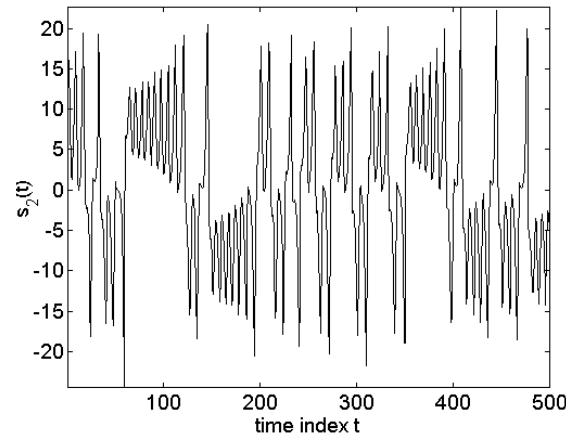


Χρόνος δειγματοληψίας τ_s



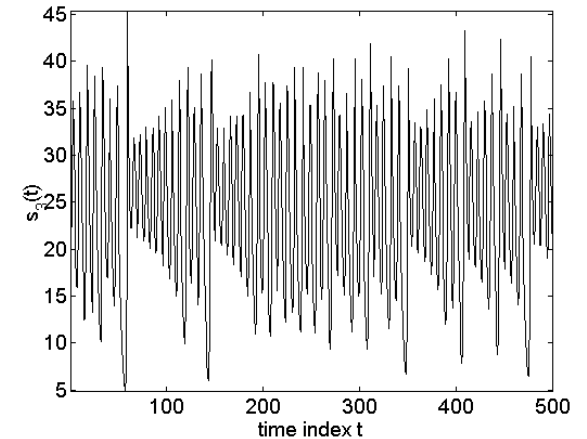
s_2

Lorenz system, s_2 variable



s_3

Lorenz system, s_3 variable



Χρονοσειρές με θόρυβο

Παρατήρηση

$$x_t = h(s_t) \xrightarrow{\text{θόρυβο}} x_t = h(s_t) + w_t$$

θόρυβος παρατήρησης

w_t : λευκός θόρυβος, ασυσχέτιστος με x_t και s_t

Δυναμικό σύστημα

$$s_t = f^t(s_0) \xrightarrow{\text{θόρυβο}} s_t = f^t(s_0) + \varepsilon_t$$

δυναμικός θόρυβος

ε_t : λευκός θόρυβος, ασυσχέτιστος με s_u $u \leq t$

Θόρυβος: δυναμικός (συστήματος) ε παρατήρησης (μέτρησης) w

λογιστική απεικόνιση

$$s_i = a s_{i-1}(1 - s_{i-1}) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, s^2)$$

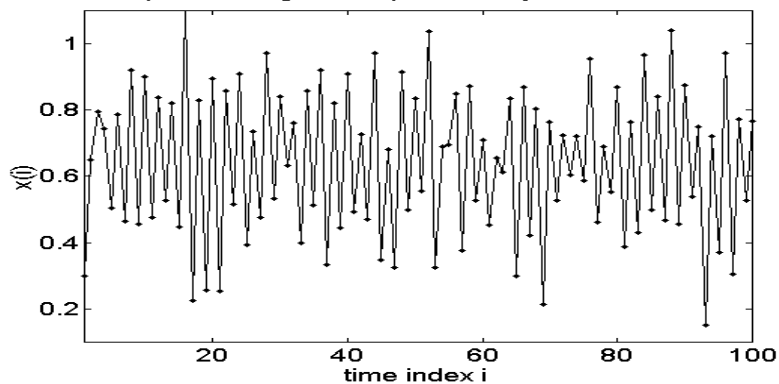
$$X_i = S_i$$

$$s_i = a s_{i-1}(1 - s_{i-1})$$

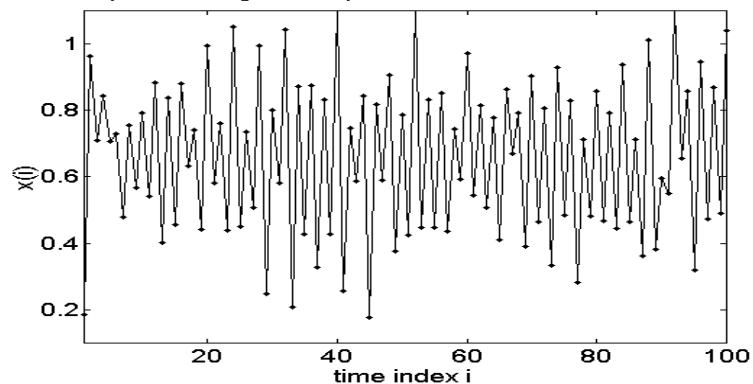
$$X_i = S_i + W_i, \quad W_i \sim N(0, s)$$

περιοδική

periodic logistic map + 10% dynamic noise

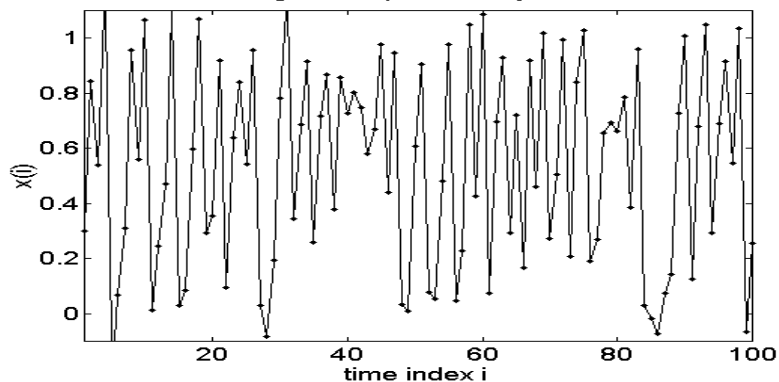


periodic logistic map + 10% measurement noise

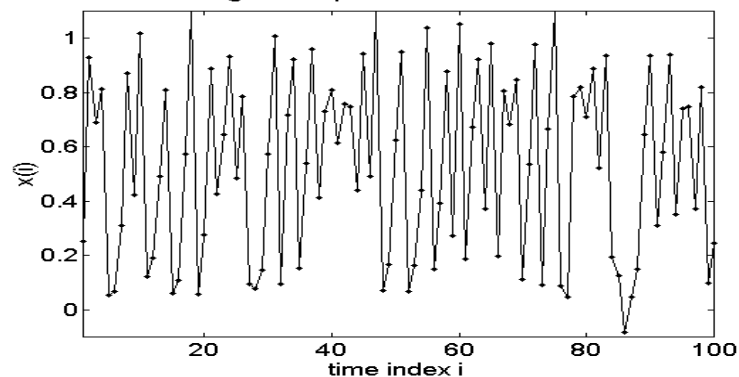


χαοτική

chaotic logistic map + 10% dynamic noise

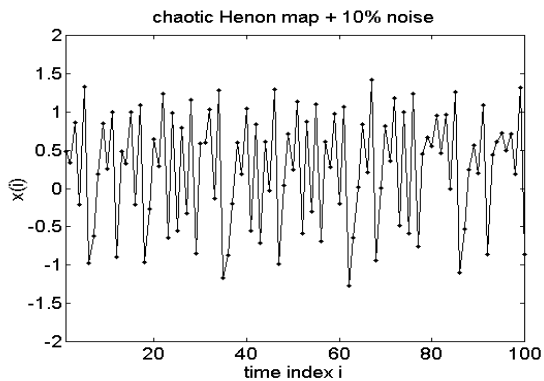
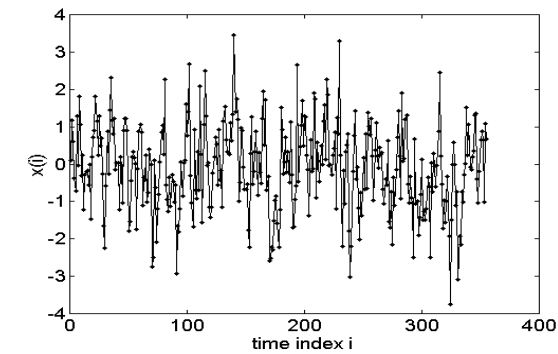
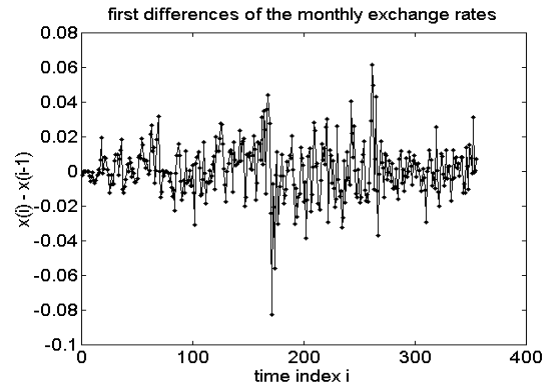


chaotic logistic map + 10% measurement noise

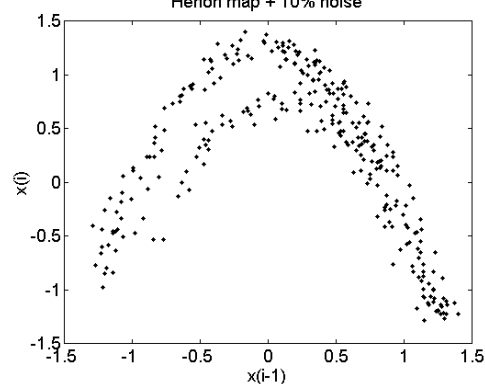
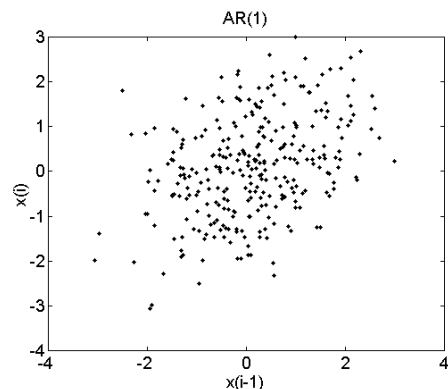
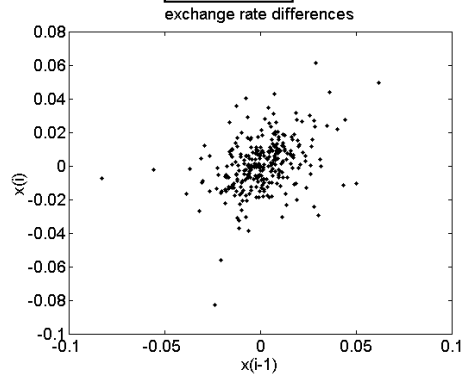


Διαγράμματα διασποράς σε 2 και 3 διαστάσεις

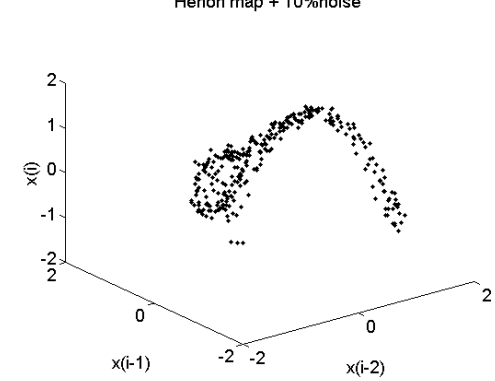
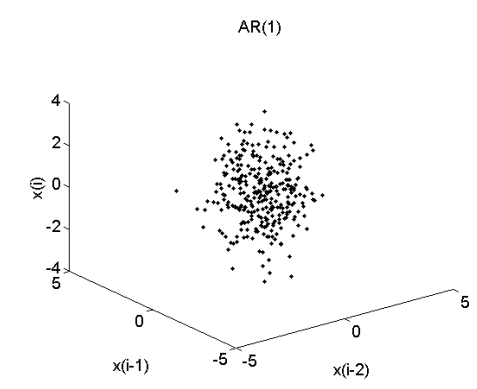
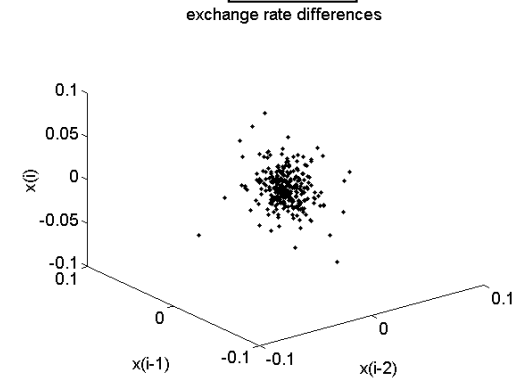
d=1



d=2

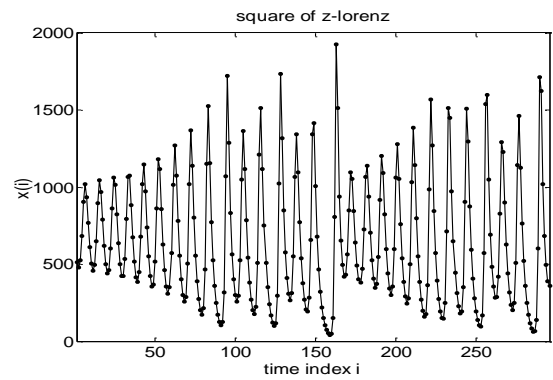
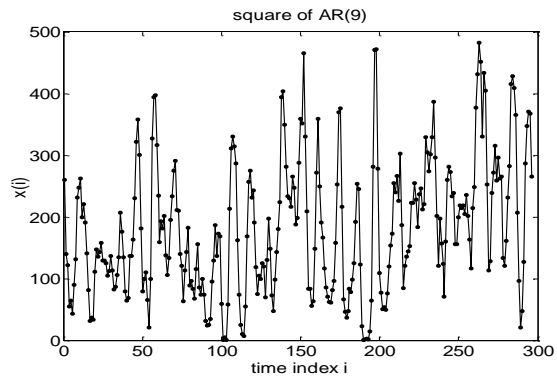
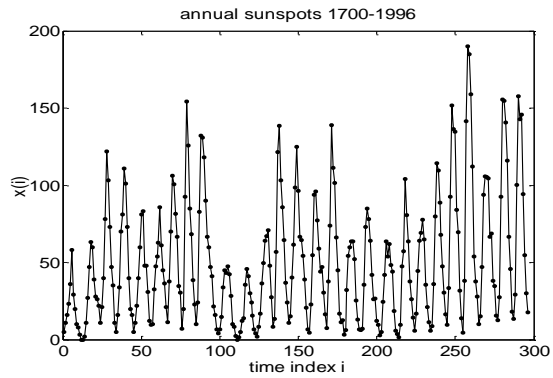


d=3

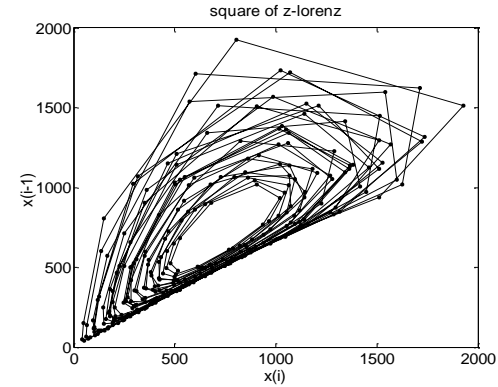
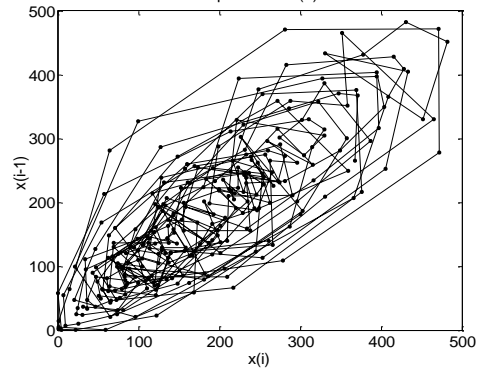
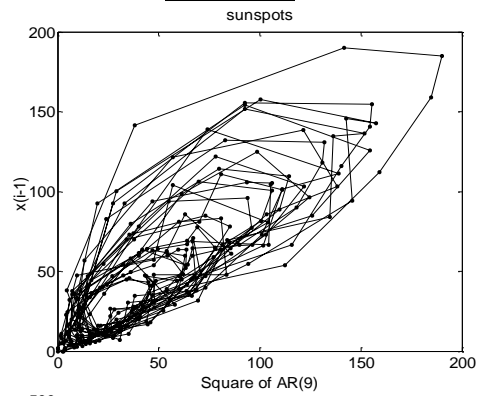


Διαγράμματα διασποράς σε 2 και 3 διαστάσεις

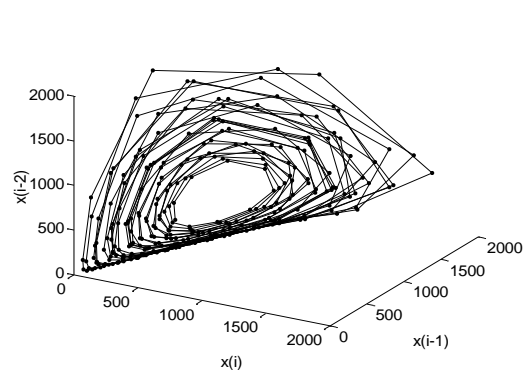
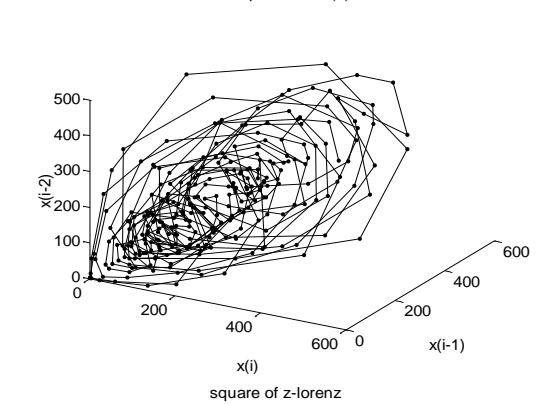
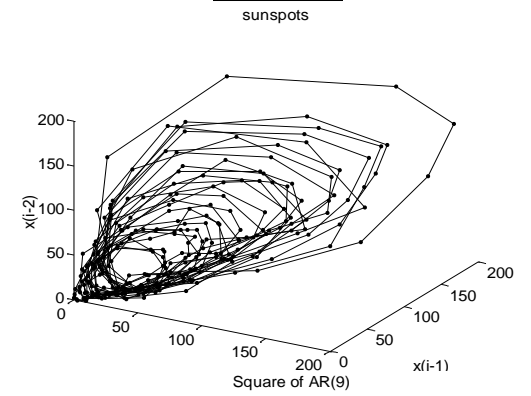
d=1



d=2



d=3



Χρονοσειρές - Μάθημα 9

Ανάλυση χρονοσειρών και δυναμικά συστήματα

- Ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων

παρατήρηση της πολυπλοκότητας / στοχαστικότητας / δομής του συστήματος

- Εκτίμηση χαρακτηριστικών του συστήματος / ελκυστή

μέτρηση της πολυπλοκότητας / διάστασης του συστήματος

- Μοντελοποίηση / Πρόβλεψη

Χρήση μη-γραμμικών μοντέλων για καλύτερες προβλέψεις

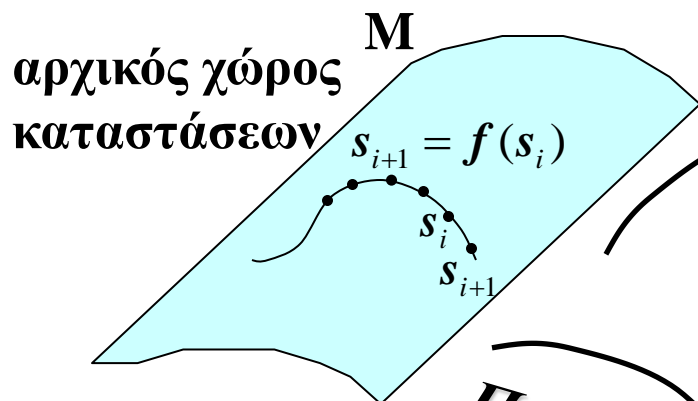
- Άλλα θέματα:

- Έλεγχος υπόθεσης για γραμμικότητα / μη-γραμμικότητα
- Έλεγχος εξέλιξης συστήματος (control)
- Συγχρονισμός δυναμικών συστημάτων
- ...

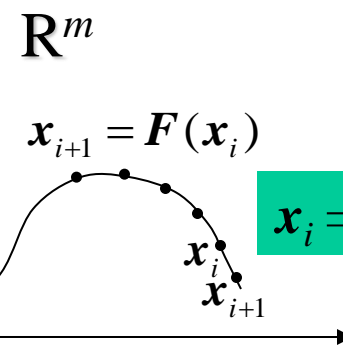
Ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων

συνθήκη: $m \geq 2D + 1$

ανακατασκευασμένος
χώρος καταστάσεων

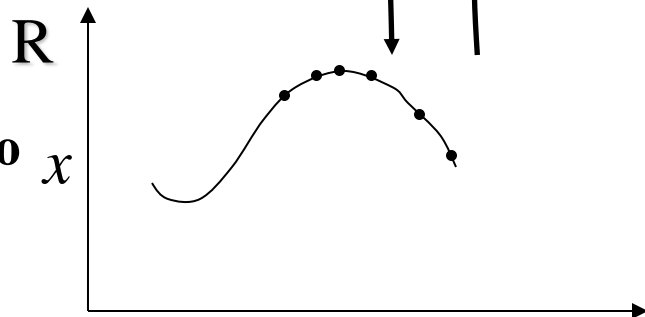


Εμβύθιση



Προβολή h

$x_i = h(s_i)$



Ανακατασκευή

Μέθοδος των υστερήσεων
 $x_i = [x_i, x_{i-\tau}, \dots, x_{i-(m-1)\tau}]$

Παράμετροι
διάσταση εμβύθισης m
χρόνος υστέρησης τ
εύρος παραθύρου χρόνου τ_w
 $\tau_w = (m-1)\tau$

Υποθέτουμε πως το υπό μελέτη σύστημα είναι αιτιοκρατικό

Παράδειγμα: Απεικόνιση Henon

$$s(i) = 1 - 1.4 s(i-1)^2 + 0.3 s(i-2)$$

ή

$$s_1(i) = 1 - 1.4 s_1(i-1)^2 + s_2(i-1)$$

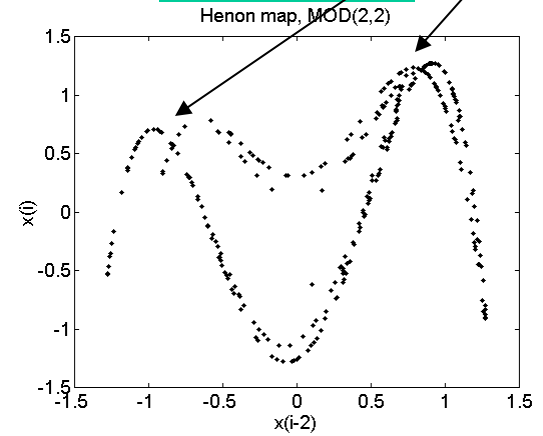
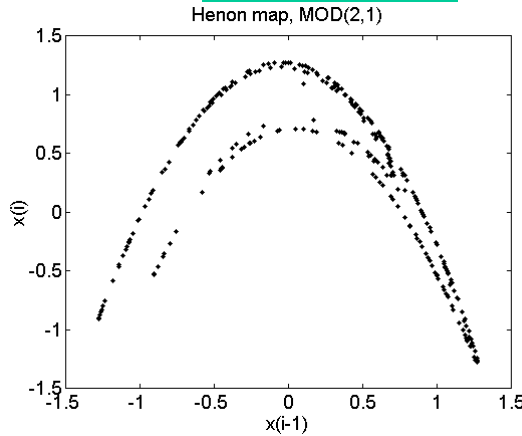
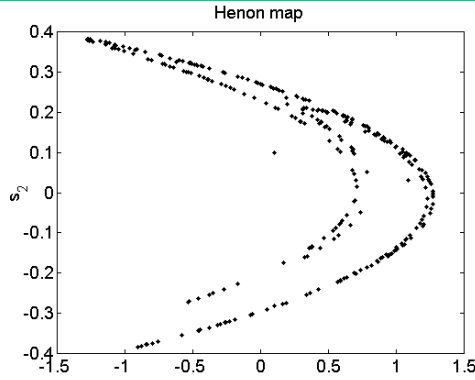
$$s_2(i) = 0.3 s_1(i-1)$$

Μέθοδος των υστερήσεων

Αυτο-τομές

$m=2 \tau=1$

$m=2 \tau=2$



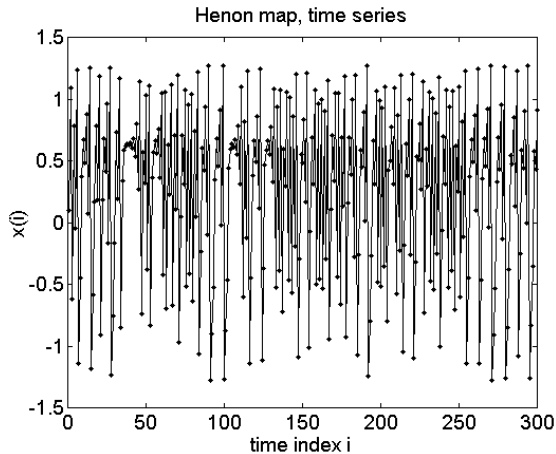
Προβολή

$$x_i = s_1(i)$$

Ανακατασκευή

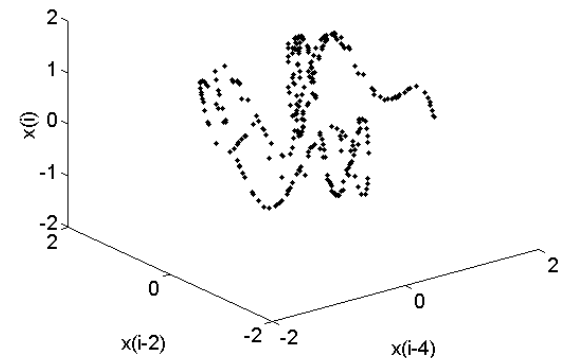
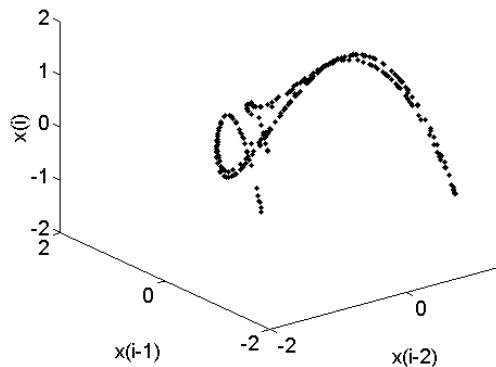
$m=3 \tau=1$

$m=3 \tau=2$



Henon map, MOD(3,1)

Henon map, MOD(3,2)



Παράδειγμα: σύστημα Lorenz

$$\dot{s}_1 = -a(s_1 - s_2)$$

$$\dot{s}_2 = -s_1 s_3 + b s_1 - s_2$$

$$\dot{s}_3 = s_1 s_2 - c s_3$$

$$a=10, b=28, c=8/3$$

Lorenz system

Βέλτιστο τ ?

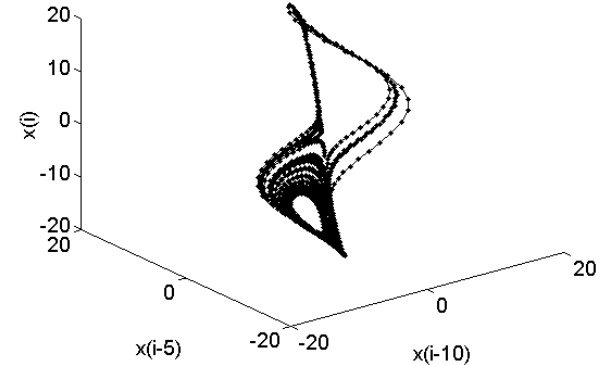
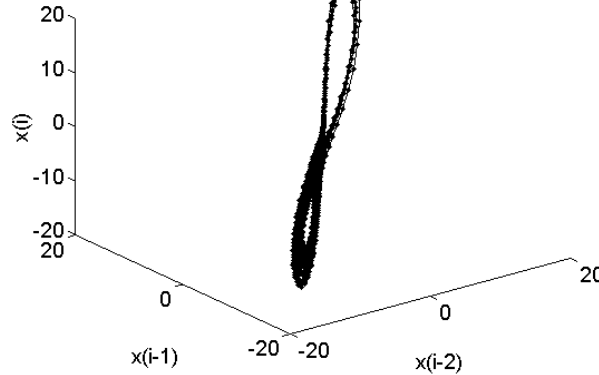
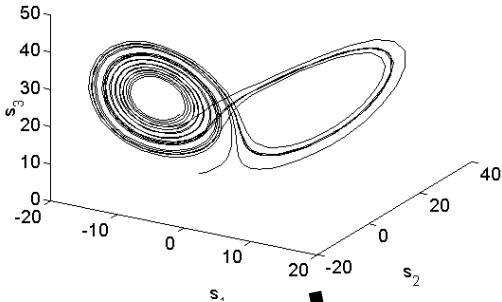
Μέθοδος υστερήσεων, $m=3$

$\tau=1$

x Lorenz, MOD(3,1)

$\tau=5$

x Lorenz, MOD(3,5)



Προβολή

$$x_i = s_1(i)$$

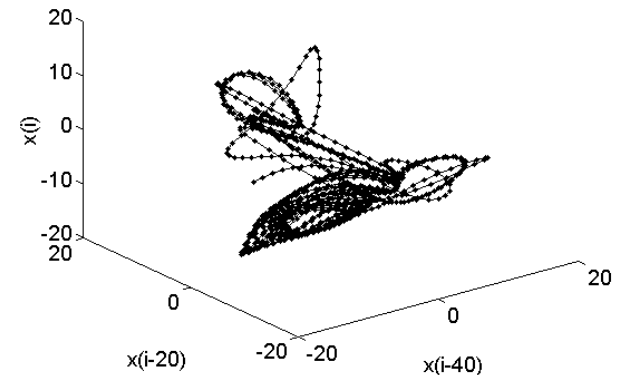
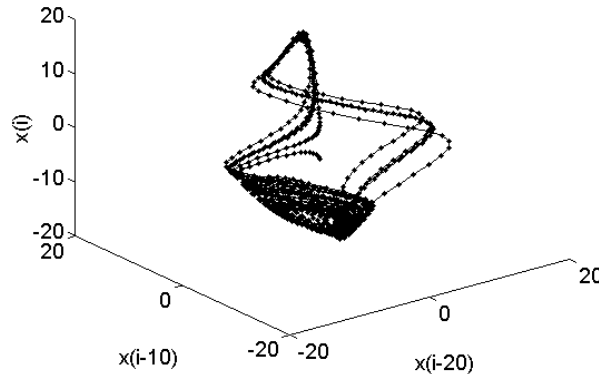
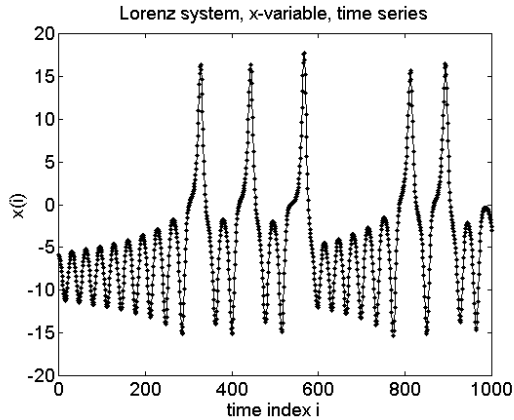
Ανακατασκευή

$\tau=10$

x Lorenz, MOD(3,10)

$\tau=20$

x Lorenz, MOD(3,20)



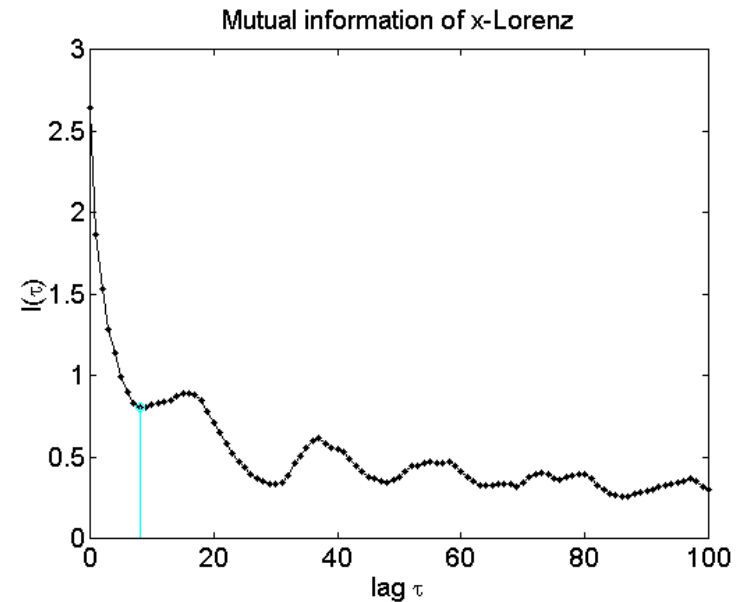
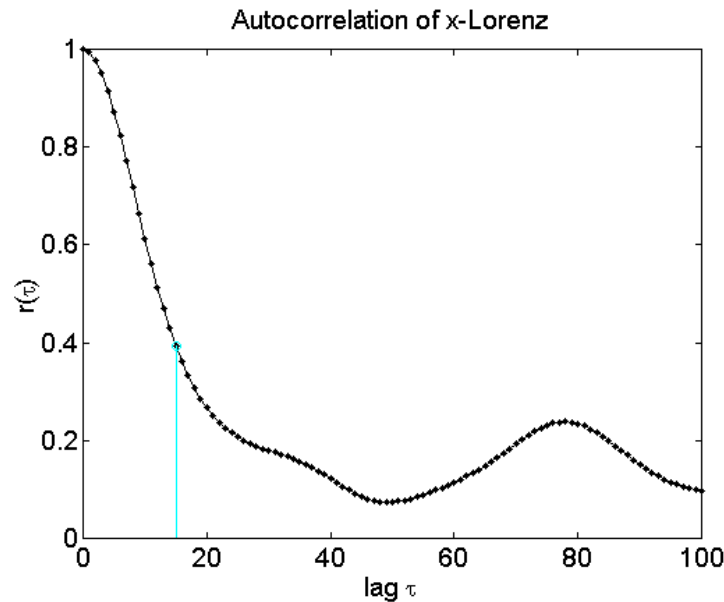
- Από την **αυτοσυσχέτιση** $r(\tau)$
(μετράει γραμμικές συσχετίσεις)
 $\tau \rightarrow r(\tau) = 1/e$ ή $\tau \rightarrow r(\tau) = 0$

- Από την **αμοιβαία πληροφορία** $I(\tau)$
(μετράει γραμμικές και μη-γραμμικές συσχετίσεις)
 $\tau \rightarrow$ πρώτο τοπικό ελάχιστο της $I(\tau)$

$$I(X, Y) = \sum_{x, y} p_{XY}(x, y) \log \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x)p_Y(y)}$$

$$X \rightarrow x_i \quad Y \rightarrow x_{i-\tau}$$

$$I(X, Y) \rightarrow I(\tau)$$



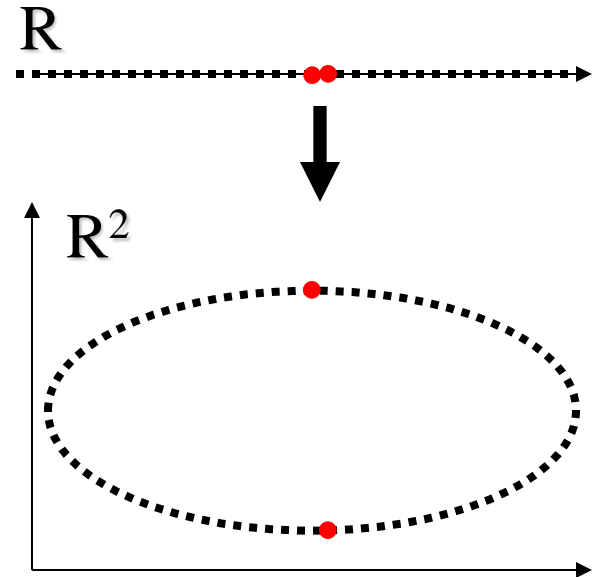
Εκτίμηση του m

Βέλτιστο m ?

- Αν m είναι πολύ μικρό, ο ελκυστής
→ παρουσιάζει αυτο-τομές
- Αν m είναι πολύ μεγάλο
→ “curse of dimensionality”
- Θεώρημα Takens: $m \geq 2D + 1$ αλλά D
άγνωστο

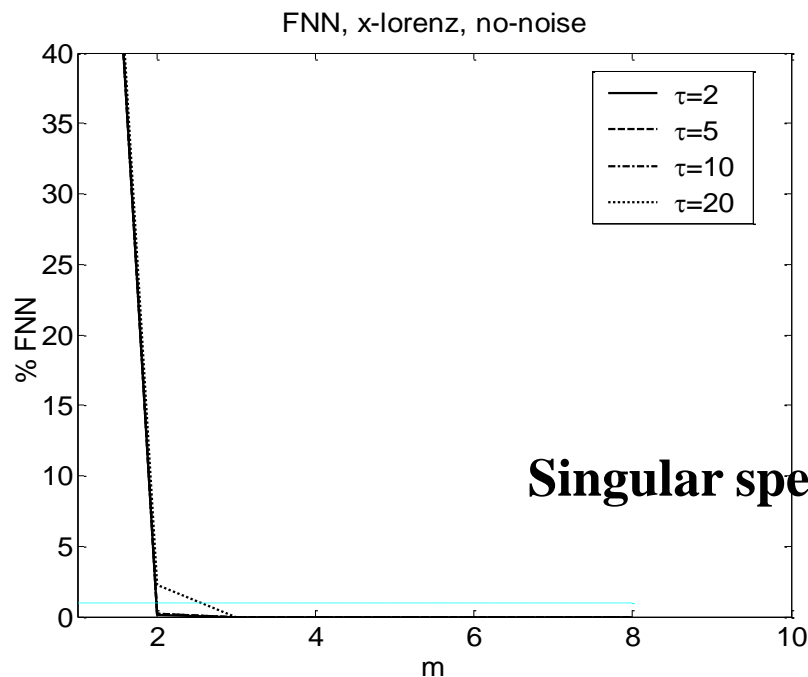
Μέθοδος των ψευδών γειτόνων (FNN)

- Κοντινά σημεία του ελκυστή είναι
 - είτε *πραγματικά* γειτονικά σημεία (λόγω της δυναμικής του συστήματος)
 - ή *ψευδή* γειτονικά σημεία (λόγω των αυτο-τομών και μικρού m)
- Σε μεγαλύτερο m όπου δεν υπάρχουν αυτο-τομές έχουν φανερωθεί όλα τα ψευδή γειτονικά σημεία αφού δε θα είναι πια γειτονικά.
- Το βέλτιστο m' είναι αυτό για το οποίο δεν εμφανίζονται πλέον ψευδή γειτονικά σημεία καθώς αυξάνουμε τη διάσταση σε $m' + 1$.

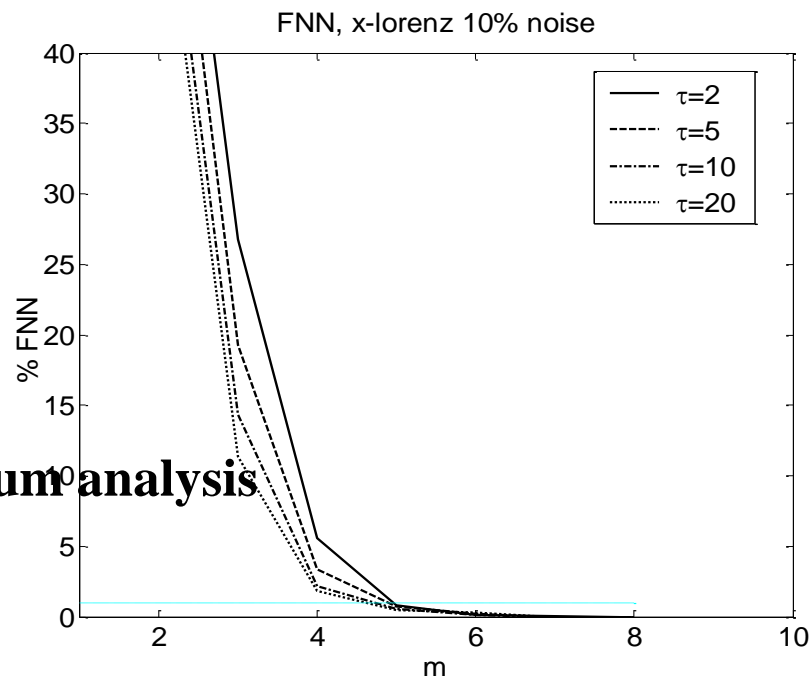


Παράδειγμα εκτίμησης του m από τη μέθοδο FNN

x-Lorenz χωρίς θόρυβο



x-Lorenz + 10% θόρυβο



Singular spectrum analysis

Η εκτίμηση του m με τη μέθοδο FNN εξαρτάται από:

- την υστέρηση t
- θόρυβο

25

Ανακατασκευή χώρου κατάστασης με την «ανάλυση φάσματος ιδιάζουσων τιμών (Singular Spectrum Analysis, SSA)

26

Μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων ανακατασκευής χώρου κατάστασης (εκτός των γνωστών)