Γραμμικές στάσιμες διαδικασίες

Χρονοσειρές Μάθημα 3

Γραμμική χρονοσειρά (στοχαστική διαδικασία)

$$X_t = \mu + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i Z_{t-i} \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2) \qquad \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i| < \infty$$

$\{X_t\}$ είναι **στάσιμη**

$\boxed{?}$

$$\mathrm{E}[X_t] = 0 \qquad \gamma_X(\tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i \psi_{i+\tau} \sigma_Z^2$$

Θεωρούμε μ=0

Θεωρώντας τον τελεστή υστέρησης:

$$X_t = \psi(B) Z_t \qquad \psi(B) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i B^i$$

Γραμμικό φίλτρο

$$Z_t \longrightarrow \boxed{\psi(B)} \longrightarrow X_t$$

Αν $\psi_i = 0$ για i<0 Γραμμική χρονοσειρά ως…

1. $$X_t = Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \cdots = Z_t + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i Z_{t-i}$$

κινούμενου μέσου MA(∞) [moving average process]

2. $$X_t = \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \cdots + Z_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i X_{t-i} + Z_t$$

αυτοπαλινδρόμησης AR(∞) [autoregressive process]

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\pi_i| < \infty \longrightarrow$$ $\{X_t\}$ είναι **αντιστρέψιμη**

το τυχαίο στοιχείο Z_t μπορεί να εκφρασθεί ως προς την παρούσα και τις προηγούμενες παρατηρήσεις X_t

$$\pi(B) X_t = Z_t \Rightarrow X_t = \frac{1}{\pi(B)} Z_t \qquad \psi(B) = \frac{1}{\pi(B)}$$

Αυτοπαλινδρομούμενες διαδικασίες

$\boxed{2}$ $$X_t = \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \cdots + Z_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i X_{t-i} + Z_t$$ αυτοπαλινδρόμηση AR(∞)

Περιορίζουμε την αυτοπαλινδρόμηση στους p πιο πρόσφατους όρους

$$X_t = \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \cdots + Z_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

⇓ **Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης p, AR(p)**

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p) X_t = Z_t \qquad \phi(B) X_t = Z_t$$

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p \qquad \varphi(B) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i B^i$$ **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**

Συνθήκη στασιμότητας

Ρίζες του $\phi(\lambda) = 0$ να είναι έξω από το μοναδιαίο κύκλο

ή

Ρίζες του $\lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \ldots - \phi_{p-1}\lambda - \phi_p = 0$ να είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου

Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης 1, AR(1)

$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma_Z^2)$ **Συνθήκη στασιμότητας:** $|\phi| < 1$

Διαδοχικές προς τα πίσω αντικαταστάσεις: $X_t = Z_t + \phi Z_{t-1} + \phi^2 Z_{t-2} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i Z_{t-i}$

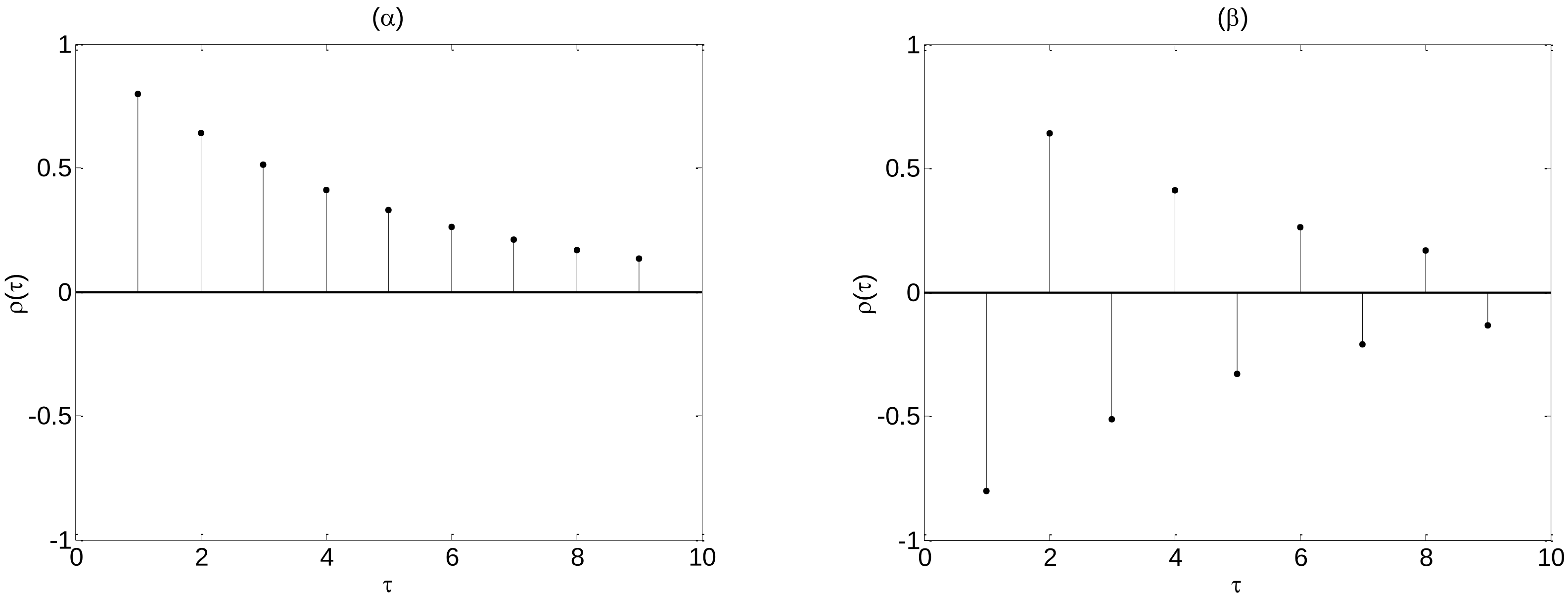
$$\mathrm{Var}[X_t] = \sigma_Z^2 (1 + \phi^2 + \phi^4 + \ldots) = \sigma_Z^2 \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i} \Rightarrow \sigma_X^2 = \frac{\sigma_Z^2}{1-\phi^2}$$

Αυτοσυσχέτιση? (υποθέτουμε στασιμότητα)

$$X_{t-1}X_t = X_{t-1}\left(\phi X_{t-1} + Z_t\right) \Rightarrow \mathrm{E}[X_{t-1}X_t] = \phi \mathrm{E}[X_{t-1}X_{t-1}] + \mathrm{E}[X_{t-1}Z_t] \Rightarrow \gamma_X(1) = \phi\sigma_X^2 \Rightarrow \rho_X(1) = \phi$$

$$X_{t-\tau}X_t = X_{t-\tau}\left(\phi X_{t-1} + Z_t\right) \Rightarrow \mathrm{E}[X_{t-\tau}X_t] = \phi \mathrm{E}[X_{t-\tau}X_{t-1}] + \mathrm{E}[X_{t-\tau}Z_t] \Rightarrow \gamma_X(\tau) = \phi\gamma_X(\tau-1)$$

$$\Rightarrow \rho_X(\tau) = \phi^\tau$$



$\phi = 0.8$ $\qquad$ $\phi = -0.8$

Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης 2, AR(2)

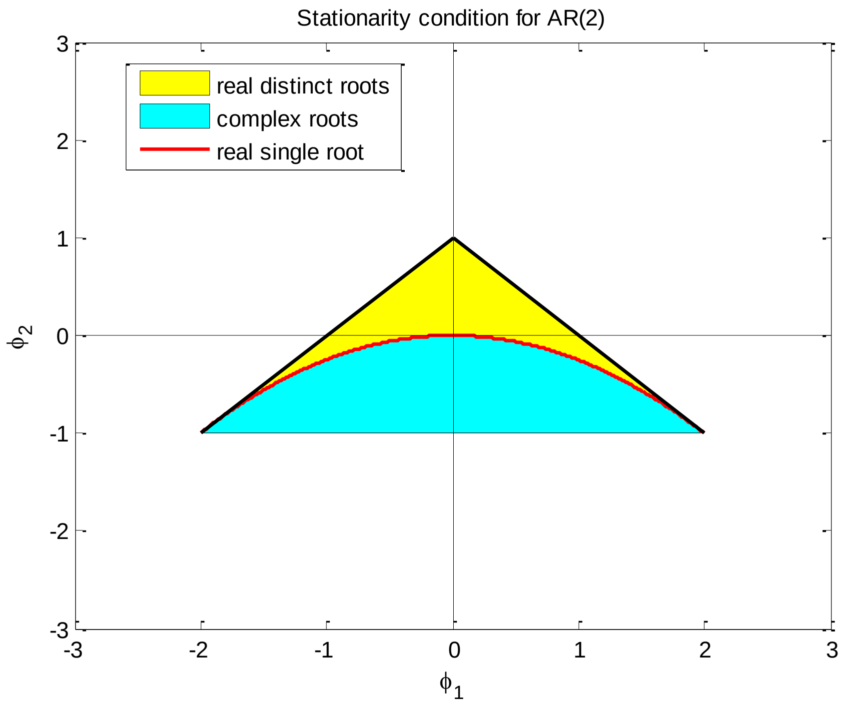
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

Συνθήκη στασιμότητας

Ρίζες του $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$ να είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου

ή εναλλακτικά οι ρίζες του $\lambda^2 - \phi_1 \lambda - \phi_2 = 0$ να είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου

Ρίζες: $B_{1,2} = \dfrac{-\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$ $\qquad |B_{1,2}| > 1 \Rightarrow \begin{cases} \phi_2 + \phi_1 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \\ -1 < \phi_2 < 1 \end{cases}$ $\boxed{?}$



δύο πραγματικές ρίζες:

$$\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$$

μία διπλή πραγματική ρίζα:

$$\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0$$

συζυγείς μιγαδικές ρίζες:

$$\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$$

8

Συζυγείς μιγαδικές ρίζες σε AR(2) ορίζουν ψευδο-περιοδικότητα στην αυτοσυσχέτιση

Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης 2, AR(2)

Αυτοσυσχέτιση? (υποθέτουμε στασιμότητα)

$$X_{t-1}X_t = X_{t-1}\left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t\right) \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}[X_{t-1}X_t] = \phi_1 \mathrm{E}[X_{t-1}X_{t-1}] + \phi_2 \mathrm{E}[X_{t-1}X_{t-2}] + \mathrm{E}[X_{t-1}Z_t] \Rightarrow$$

$$\gamma_X(1) = \phi_1 \sigma_X^2 + \phi_2 \gamma_X(1) \Rightarrow \rho_X(1) = \phi_1 + \phi_2 \rho_X(1)$$

$$X_{t-2}X_t = X_{t-2}\left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t\right) \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}[X_{t-2}X_t] = \phi_1 \mathrm{E}[X_{t-2}X_{t-1}] + \phi_2 \mathrm{E}[X_{t-2}X_{t-1}] + \mathrm{E}[X_{t-2}Z_t] \Rightarrow$$

$$\gamma_X(2) = \phi_1 \gamma_X(1) + \phi_2 \sigma_X^2 \Rightarrow \rho_X(2) = \phi_1 \rho_X(1) + \phi_2$$

$$\boxed{\begin{gathered} \rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \end{gathered}}$$

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \qquad \phi_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}$$

$$\rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} \qquad \phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

Για υστέρηση τ:

$$\gamma_X(\tau) = \phi_1 \gamma_X(\tau-1) + \phi_2 \gamma_X(\tau-2) \Rightarrow$$

$$\rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \phi_2 \rho_{\tau-2} \qquad (1-\phi_1 B - \phi_2 B^2)\rho_\tau = 0$$

ρ_τ μπορεί να υπολογιστεί επαναληπτικά

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

πραγματικές ρίζες: εκθετική πτώση

μιγαδικές ρίζες: φθίνουσα ημιτονοειδή συνάρτηση

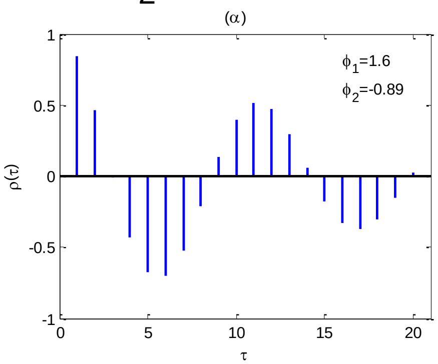
διασπορά

$$X_t X_t = X_t\left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t\right) \Rightarrow$$

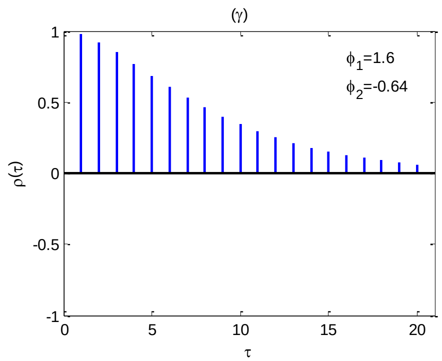
$$\sigma_X^2 = \phi_1 \gamma_X(1) + \phi_2 \gamma_X(2) + \sigma_Z^2 \Rightarrow \qquad \sigma_X^2 = \frac{\sigma_Z^2}{1-\phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2}$$

Αυτοσυσχέτιση

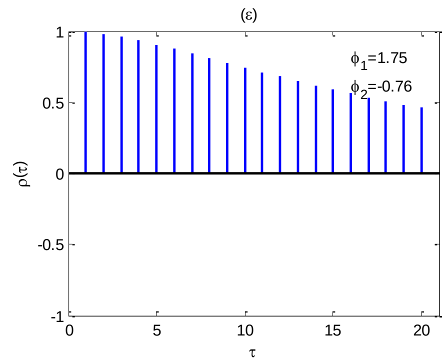
(α) λ_1=0.8+0.5i
λ_2=0.8-0.5i



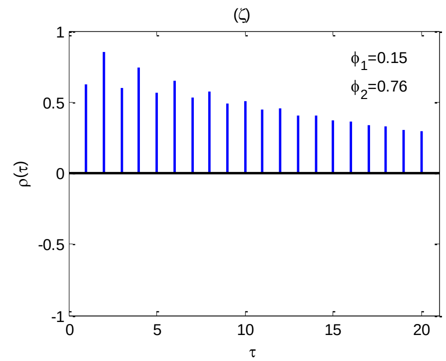
(γ) λ_1=0.8
λ_2=0.8



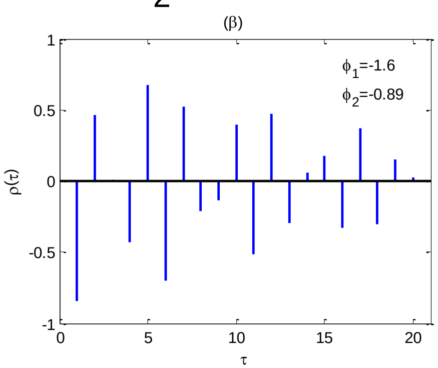
(ε) λ_1=0.8
λ_2=0.95



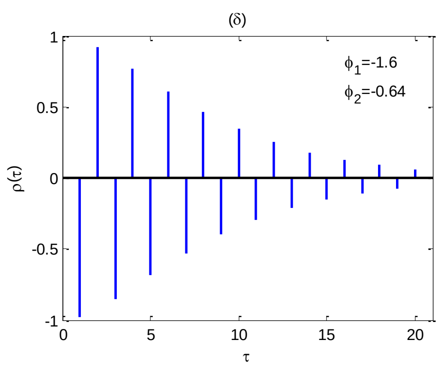
(ζ) λ_1=-0.8
λ_2=0.95



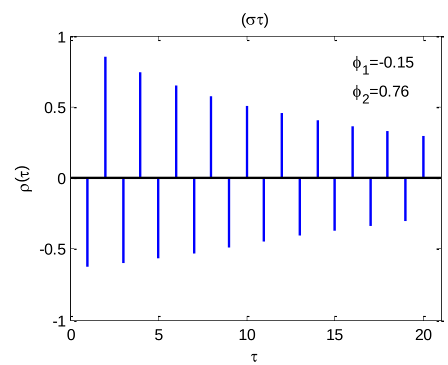
(β) λ_1=-0.8+0.5i
λ_2=-0.8-0.5i



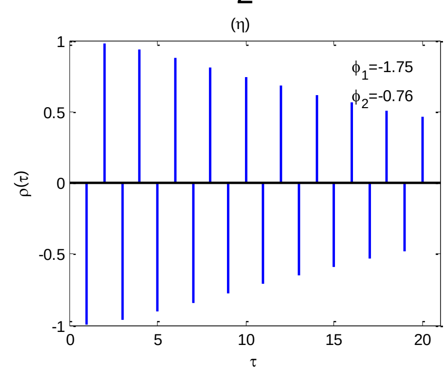
(δ) λ_1=-0.8
λ_2=-0.8



(στ) λ_1=0.8
λ_2=-0.95



(η) λ_1=-0.8
λ_2=-0.95



Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης p, AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p) X_t = Z_t$$

Συνθήκη στασιμότητας

Ρίζες του $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$ να είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου

Αυτοσυσχέτιση? (υποθέτουμε στασιμότητα)

Για υστέρηση τ:

$$X_{t-\tau} X_t = X_{t-\tau} \left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t \right) \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}[X_{t-\tau} X_t] = \phi_1 \mathrm{E}[X_{t-\tau} X_{t-1}] + \phi_2 \mathrm{E}[X_{t-\tau} X_{t-2}] + \cdots + \phi_p \mathrm{E}[X_{t-p} X_{t-2}] + \mathrm{E}[X_{t-p} Z_t] \Rightarrow$$

$$\gamma_X(\tau) = \phi_1 \gamma_X(\tau - 1) + \phi_2 \gamma_X(\tau - 2) + \cdots + \phi_p \gamma_X(\tau - p) \Rightarrow$$

$$\rho_X(\tau) = \phi_1 \rho_X(\tau - 1) + \phi_2 \rho_X(\tau - 2) + \cdots + \phi_p \rho_X(\tau - p) \Rightarrow \phi(B) \rho_\tau = 0$$

πραγματικές ρίζες: εκθετική πτώση

μιγαδικές ρίζες: φθίνουσα ημιτονοειδή συνάρτηση

9 **Συνθήκες στασιμότητας για τους συντελεστές φ_1, φ_2, φ_3, της διαδικασίας AR(3)**

Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης p, AR(p)

$$\rho_\tau = \phi_1\rho_{\tau-1} + \phi_2\rho_{\tau-2} + \cdots + \phi_p\rho_{\tau-p} \qquad \rho_\tau = \rho_{-\tau}$$

$$\begin{array}{ll}
\tau = 1 & \rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \cdots + \phi_p\rho_{p-1} \\
\tau = 2 & \rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p\rho_{p-2} \\
\cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\tau = p & \rho_p = \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \cdots + \phi_p
\end{array}$$

Εξισώσεις Yule-Walker

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\rho}_p = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_p = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_p\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\rho}_p$$

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{P}_p^{-1}\boldsymbol{\rho}_p$$

Διασπορά

$$X_t X_t = X_t\left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t\right) \Rightarrow$$

$$\sigma_X^2 = \phi_1\gamma_X(1) + \phi_2\gamma_X(2) + \cdots + \phi_p\gamma_X(p) + \sigma_Z^2 \Rightarrow \quad \sigma_X^2 = \frac{\sigma_Z^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \cdots - \phi_p\rho_p}$$

Μερική αυτοσυσχέτιση

Εξισώσεις Yule-Walker
$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

Για κάθε k υπολογίζουμε τον συντελεστή $\phi_k \to \phi_{kk}$

$k=1$ $\qquad \phi_{11} = \rho_1$

$k=2$ $\qquad \phi_{22} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$

$k=3$ $\qquad \phi_{33} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$

$\cdots \qquad \cdots$

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

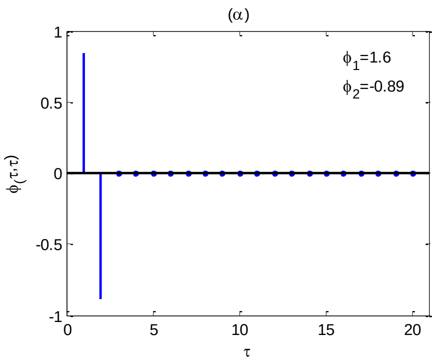
μερική αυτοσυσχέτιση για υστέρηση (τάξη) k

Επαναληπτικός αλγόριθμος των Durbin-Levinson

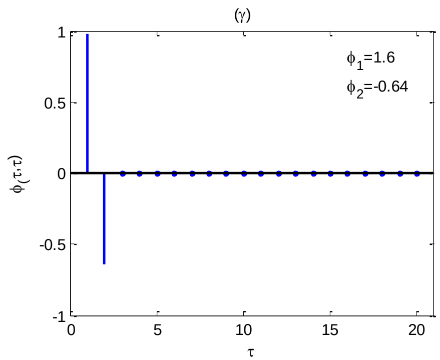
οι συντελεστές του AR(p) $\phi_{p1}, \phi_{p2}, \ldots, \phi_{pp}$, υπολογίζονται επαναληπτικά, όπου για κάθε τάξη k οι συντελεστές υπολογίζονται από τους συντελεστές τάξης k-1

Μερική αυτοσυσχέτιση

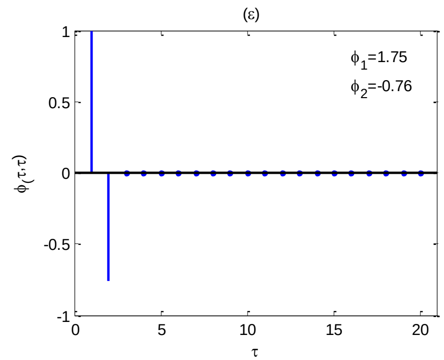
(α) λ_1=0.8+0.5i
λ_2=0.8-0.5i



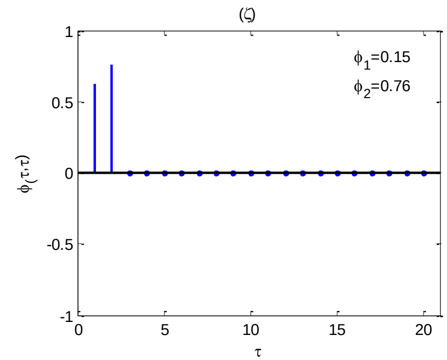
(γ) λ_1=0.8
λ_2=0.8



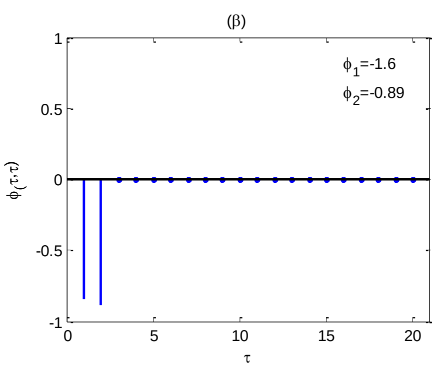
(ε) λ_1=0.8
λ_2=0.95



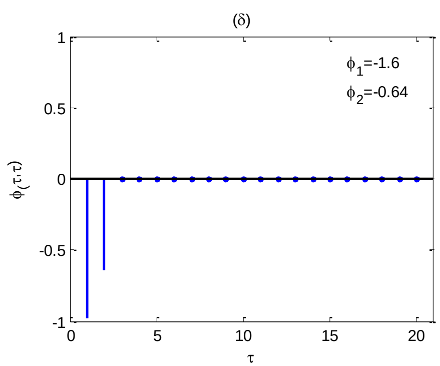
(ζ) λ_1=-0.8
λ_2=0.95



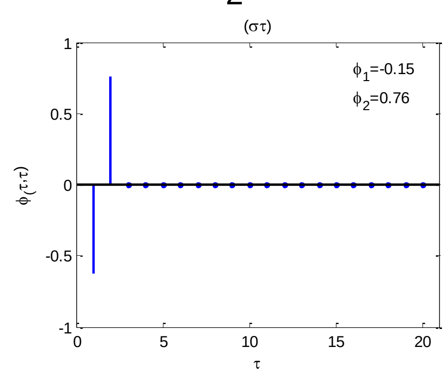
(β) λ_1=-0.8+0.5i
λ_2=-0.8-0.5i



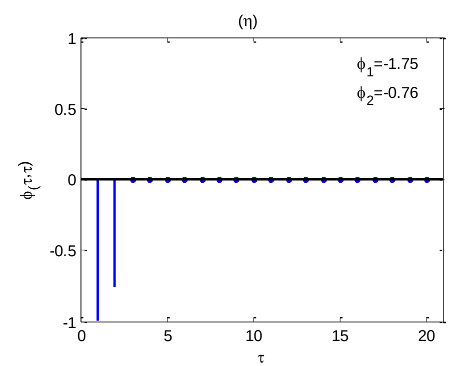
(δ) λ_1=-0.8
λ_2=-0.8



(στ) λ_1=0.8
λ_2=-0.95



(η) λ_1=-0.8
λ_2=-0.95



Διαδικασίες κινούμενου μέσου

$\boxed{1}$ $$X_t = Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \cdots = Z_t + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i Z_{t-i}$$ κινούμενου μέσου MA(∞)

Περιορίζουμε του όρους του λευκού θορύβου στους q πιο πρόσφατους όρους

$$X_t = Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \cdots \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

$\Downarrow$

Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης q, MA(q)

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q} \qquad \psi_i = -\theta_i$$

$$X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q) Z_t \qquad X_t = \theta(B) Z_t \qquad \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

MA(q) είναι στάσιμη $\boxed{?}$

MA(q) είναι αντιστρέψιμη αν $Z_t = \theta^{-1}(B) X_t$

Συνθήκη αντιστρεψιμότητας

Ρίζες του $\theta(\lambda) = 0$ να είναι έξω από το μοναδιαίο κύκλο

Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης 1, ΜΑ(1)

$X_t = Z_t - \theta Z_{t-1} \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$ **Συνθήκη αντιστρεψιμότητας:** $|\theta| < 1$

$$X_t X_t = \left(Z_t - \theta Z_{t-1}\right)\left(Z_t - \theta Z_{t-1}\right) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \sigma_X^2 = (1+\theta^2)\sigma_Z^2$$

?

$$X_{t-1} X_t = \left(Z_{t-1} - \theta Z_{t-2}\right)\left(Z_t - \theta Z_{t-1}\right) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \gamma_X(1) = \theta\sigma_Z^2 \Rightarrow \rho_1 = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

$$X_{t-2} X_t = \left(Z_{t-2} - \theta Z_{t-3}\right)\left(Z_t - \theta Z_{t-1}\right) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \gamma_X(2) = 0$$

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta}{1+\theta^2} & \tau = 1 \\ 0 & \tau \geq 2 \end{cases}$$

$|\rho_1| \leq 1/2$

?

Για κάποιο ρ_1 υπάρχουν δύο λύσεις για θ
και μόνο η μία θα πληρεί τη συνθήκη αντιστρεψιμότητας

Παράδειγμα

$X_t = Z_t - 0.4 Z_{t-1}$

$X_t = Z_t - 2.5 Z_{t-1}$

$$\rho_\tau = \begin{cases} -\dfrac{1}{2.9} & \tau = 1 \\ 0 & \tau \geq 2 \end{cases}$$

$X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}$ και $X_t = Z_t - 1/\theta Z_{t-1}$

έχουν την ίδια αυτοσυσχέτιση

Αν η ρίζα του $1 - \theta B = 0$ είναι έξω
από το μοναδιαίο κύκλο ➔
η ρίζα του $1 - 1/\theta B = 0$ είναι μέσα στο
μοναδιαίο κύκλο

Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης 1, MA(1)

Μερική αυτοσυσχέτιση

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

$$\phi_{2,2} = \frac{-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} = -\frac{\theta^2}{1+\theta^2+\theta^4}$$

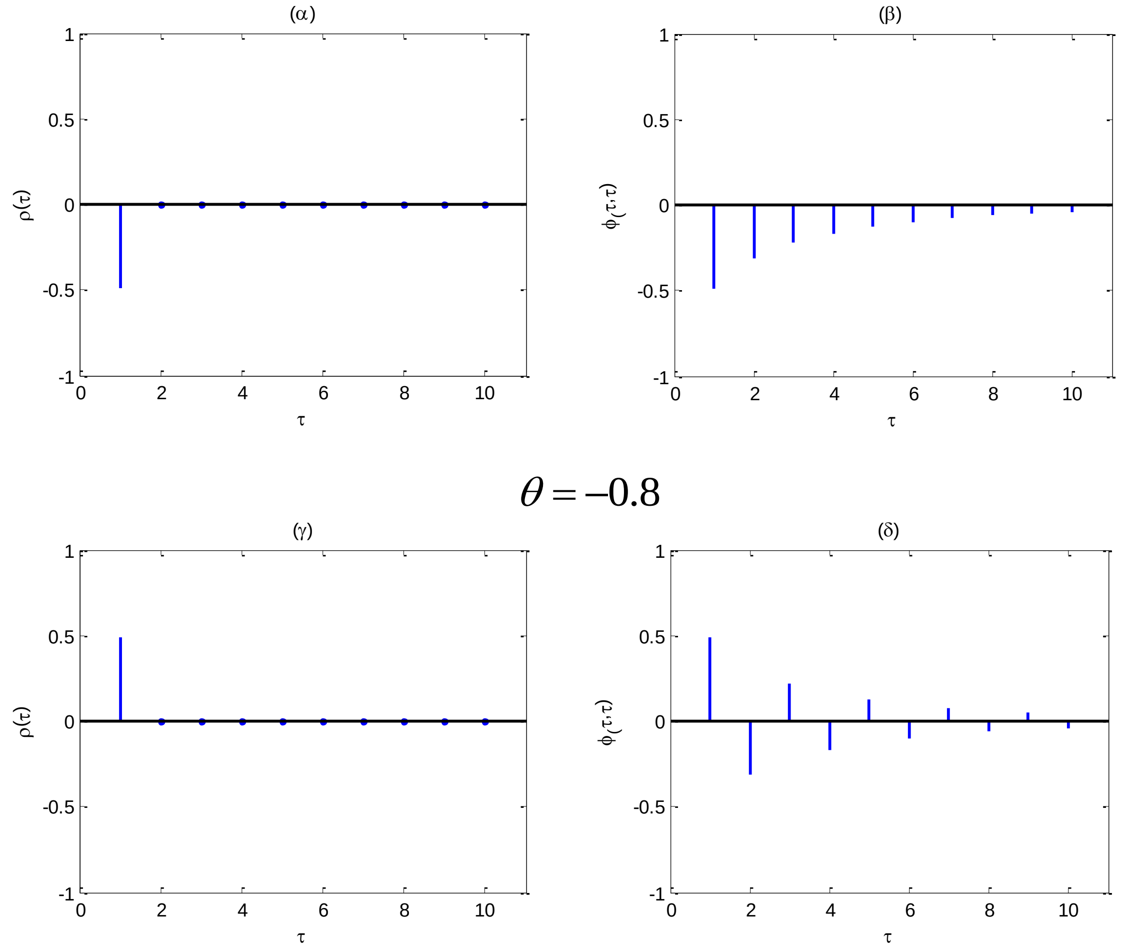
$$\phi_{3,3} = \frac{\rho_1^3}{1-2\rho_1^2} = -\frac{\theta^3}{1+\theta^2+\theta^4+\theta^6}$$

$$\boxed{\phi_{\tau,\tau} = -\frac{\theta^\tau(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(\tau+1)}}, \qquad \tau \geq 1}$$

- $\phi_{\tau\tau}$ του MA(1) φθίνει όπως ρ_τ του AR(1)
- ρ_τ του MA(1) φθίνει όπως $\phi_{\tau\tau}$ του AR(1)
- … αλλά για MA(1), ρ_τ και $\phi_{\tau\tau}$ είναι πάντα ≤0.5

$\theta = 0.8$

$\theta = -0.8$



Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης 2, MA(2)

$$X_t = \theta(B)Z_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2}, \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma_Z^2)$$

$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο

MA(2) είναι πάντα στάσιμη

MA(2) είναι αντιστρέψιμη αν οι ρίζες του $\theta(B)$ είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου

Διασπορά $\sigma_X^2 = (1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_Z^2$

Αυτοσυσχέτιση

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & \tau = 1 \\ \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & \tau = 2 \\ 0 & \tau > 2 \end{cases}$$

Μερική αυτοσυσχέτιση

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{2,2} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

$$\phi_{3,3} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2-\rho_2)}{1-\rho_2^2 - 2\rho_1^2(1-\rho_2)}$$

$\phi_{\tau,\tau} = \ldots$ πολύπλοκη έκφραση

10

Συνθήκες αντιστρεψιμότητας για τους συντελεστές θ_1, θ_2, καθώς και για τις αυτοσυσχετίσεις ρ_1, ρ_2, της διαδικασίας MA(2)

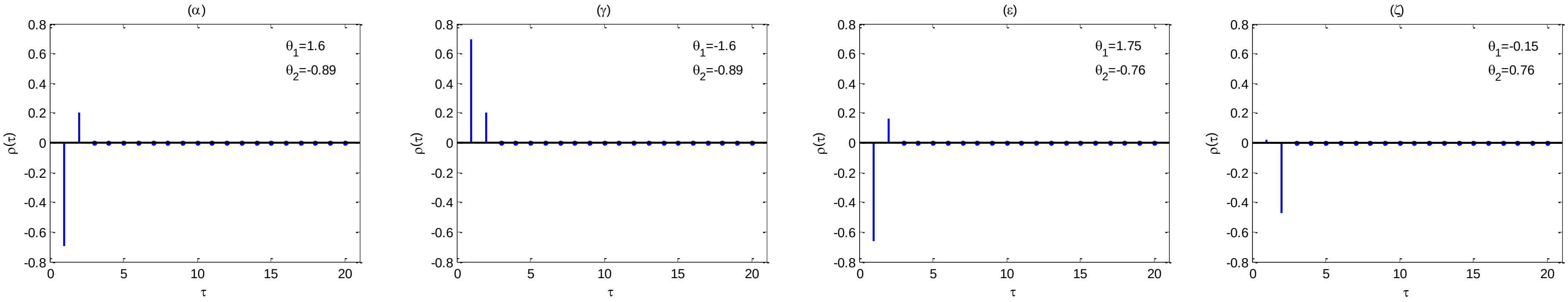
λ_1=0.8+0.5i
λ_2=0.8-0.5i

λ_1=-0.8+0.5i
λ_2=-0.8-0.5i

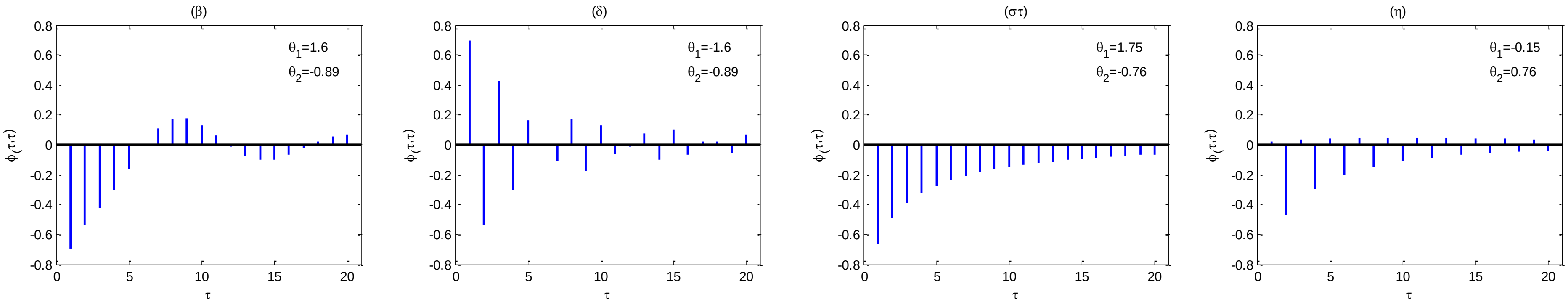
λ_1=0.8
λ_2=0.95

λ_1=0.8
λ_2=-0.95

Αυτοσυσχέτιση



Μερική αυτοσυσχέτιση



- $\phi_{\tau\tau}$ του MA(2) φθίνει όπως ρ_τ του AR(2)
- ρ_τ του MA(2) φθίνει όπως $\phi_{\tau\tau}$ του AR(2)
- … αλλά για MA(2), ρ_τ και $\phi_{\tau\tau}$ είναι πάντα ≤0.5

Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης q, MA(q)

$$X_t = \theta(B) Z_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q} \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Διασπορά $\sigma_X^2 = (1 + \theta_1^2 + \cdots \theta_q^2)\sigma_Z^2$

Αυτοδιασπορά

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \sigma_Z^2(-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \cdots + \theta_{q-\tau}\theta_q) & \tau = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & \tau > q \end{cases}$$

Αυτοσυσχέτιση

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \cdots + \theta_{q-\tau}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2} & \tau = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & \tau > q \end{cases}$$

Η μερική αυτοσυσχέτιση φθίνει με μορφή που καθορίζεται από τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Οι εκφράσεις των $\phi_{\tau\tau}$ ως προς τους συντελεστές θ_1, θ_2, ..., θ_q είναι πολύπλοκες