

Χρονοσειρές Μάθημα 1

Μάθημα του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ (ΤΗΜΜΥ) ΑΠΘ

Κουγιουμτζής Δημήτρης

Καθηγητής Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ, Πολυτεχνική Σχολή, ΑΠΘ

e-mail: dkugiu@auth.gr, <http://users.auth.gr/~dkugiu/>

ιστοσελίδα μαθήματος στο elearning και

<http://users.auth.gr/dkugiu/Teach/TimeSeriesTHMMY>

Περιεχόμενα

- Βασικά χαρακτηριστικά χρονοσειρών: στασιμότητα, αυτοσυσχέτιση, μερική αυτοσυσχέτιση, απομάκρυνση στοιχείων μη-στασιμότητας, έλεγχος ανεξαρτησίας για χρονοσειρές.
- Γραμμικές στοχαστικές διαδικασίες: αυτοπαλινδρομούμενη (AR), κινούμενου μέσου (MA), μικτή (ARMA).
- Μοντέλα χρονοσειρών: AR, MA και ARMA σε στάσιμες χρονοσειρές, μικτό ολοκληρωμένο μοντέλο (ARIMA) και εποχικό ARIMA (SARIMA) σε μη-στάσιμες χρονοσειρές.
- Πρόβλεψη χρονοσειρών.
- Μη-γραμμική ανάλυση χρονοσειρών: μη-γραμμικά χαρακτηριστικά χρονοσειρών, μη-γραμμική δυναμική και χάος, μη-γραμμική πρόβλεψη χρονοσειρών.

Βιβλιογραφία

["Ανάλυση χρονοσειρών", Δημήτρης Κουγιουμτζής, σημειώσεις 2014 \(σε PDF\)](#)

Συγγράματα μαθήματος

1. Χαστικές Χρονοσειρές: Θεωρία και Πράξη

Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 50659162) Έκδοση: 1/2001

Συγγραφείς: Παπαϊωάννου Γεώργιος,

ISBN: 9607901053, Διαθέτης (Εκδότης): LIBERAL BOOKS ΜΟΝΟΠΡΟΣΩΠΗ ΕΠΕ

2. **Introduction to Time Series and Forecasting** [electronic resource]

Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 75487888, Third Edition/2016,

Συγγραφείς: Peter J. Brockwell / Richard A. Davis

ISBN: 9780387216577, Τύπος: Ηλεκτρονικό Βιβλίο, Διαθέτης (Εκδότης): HEAL-Link Springer ebooks

3. **Introduction to Modern Time Series Analysis** [electronic resource]

Κωδικός Βιβλίου στον Εύδοξο: 73243237, Έκδοση: 2nd ed. 2013/2013

Συγγραφείς: Gebhard Kirchgassner / Jurgen Wolters / Uwe Hassler

ISBN: 9783642334368, Διαθέτης (Εκδότης): HEAL-Link Springer ebooks

Προτεινόμενη διεθνής βιβλιογραφία

1. The Analysis of Time Series, An Introduction, Chatfield C., Sixth edition, Chapman & Hall, 2004

2. Introduction to time series and forecasting, Brockwell P.J. and Davis R.A., Second edition, Springer, 2002

3. Nonlinear Time Series Analysis, Kantz H. and Schreiber T., Cambridge University Press, 2004

4. Applied Nonlinear Time Series Analysis: Applications in Physics, Physiology and Finance, Michael Small, World Scientific

Χρονοσειρά και σήμα, ανάλυση χρονοσειρών και επεξεργασία / ανάλυση σημάτων

A **time series** is a **series** of data points indexed (or listed or graphed) in **time order**.

πηγή: Wikipedia

In signal processing, a **signal** is a function that conveys information about a phenomenon. In electronics and telecommunications, it refers to any time varying voltage, current or electromagnetic wave that carries information.

πηγή: Wikipedia

Time series analysis comprises **methods** for analyzing time series data in order to **extract** meaningful **statistics** and other **characteristics** of the data.

πηγή: Wikipedia

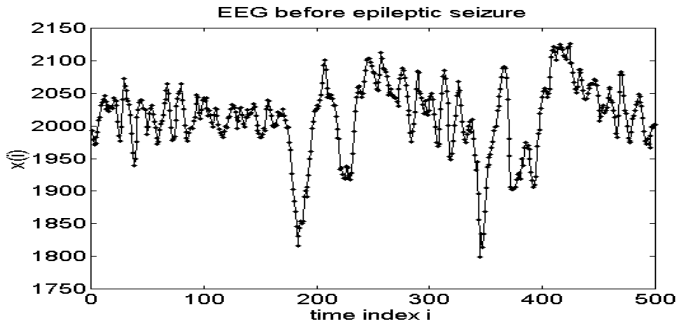
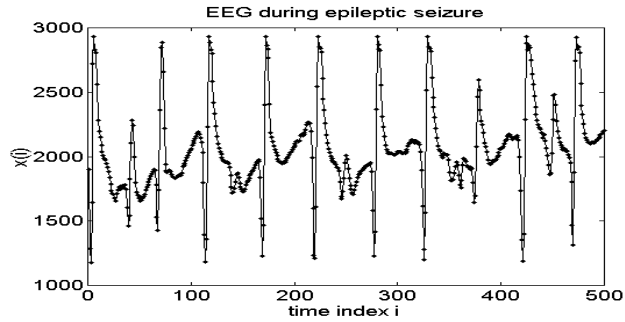
Signal processing is an **electrical engineering subfield** that focuses on analysing, modifying and synthesizing signals such as sound, images and biological measurements. Signal processing techniques can be used to improve transmission, storage efficiency and subjective quality and to also emphasize or detect components of interest in a measured signal.

πηγή: Wikipedia

- Σήμα και χρονοσειρά είναι συνώνυμα για μια χρονικά διαταγμένη σειρά αριθμών.
- Σήμα και επεξεργασία σήματος είναι όροι που χρησιμοποιούνται στη μηχανική
- Χρονοσειρά και ανάλυση χρονοσειρών είναι γενικότεροι όροι για δεδομένα χρονικά διαταγμένα και ανάλυση τους.

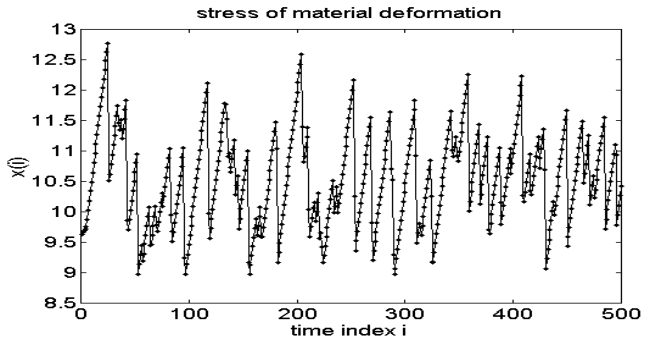
Πραγματικές χρονοσειρές

φυσιολογία

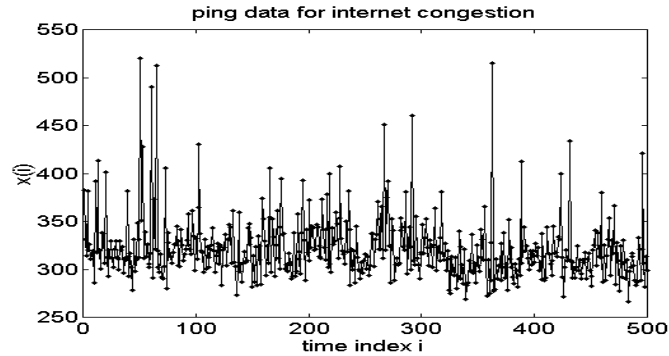


μονοδιάστατη
χρονοσειρά

μηχανική



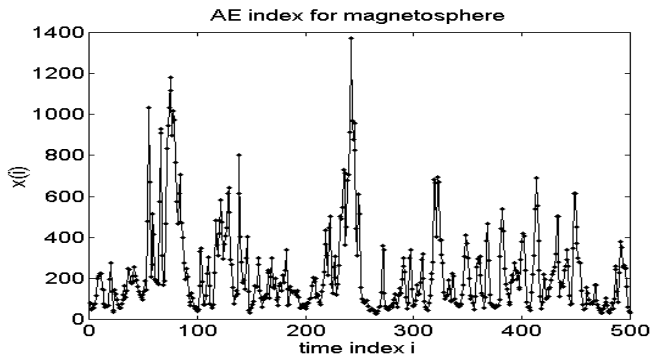
ηλεκτρονική



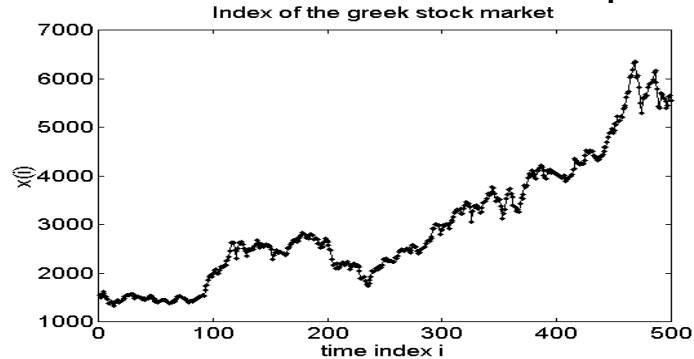
μόνο μια χρονοσειρά

περιορισμένο μήκος

γεωφυσική



οικονομία



μη-στασιμότητα

θόρυβος

Ορισμοί / συμβολισμοί

Παρατηρούμενο μέγεθος → **μεταβλητή** [variable] X

Οι τιμές του παρατηρούμενου μεγέθους αλλάζουν με κάποια μικρή ή μεγάλη τυχαιότητα (στοχαστικότητα) → **τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)** [random variable] X

Οι παρατηρήσεις γίνονται συνήθως με συγκεκριμένο χρονικό βήμα
→ **χρόνος δειγματοληψίας** [sampling time].

Για κάθε χρονική στιγμή t θεωρούμε την τιμή x_t της τυχαίας μεταβλητής X .

Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής x_t για κάποια χρονική περίοδο n (σε μονάδες δειγματοληψίας) → (μονοδιάστατη) **χρονοσειρά** [(univariate) time series]

$$\{x_t\}_{t=1}^n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

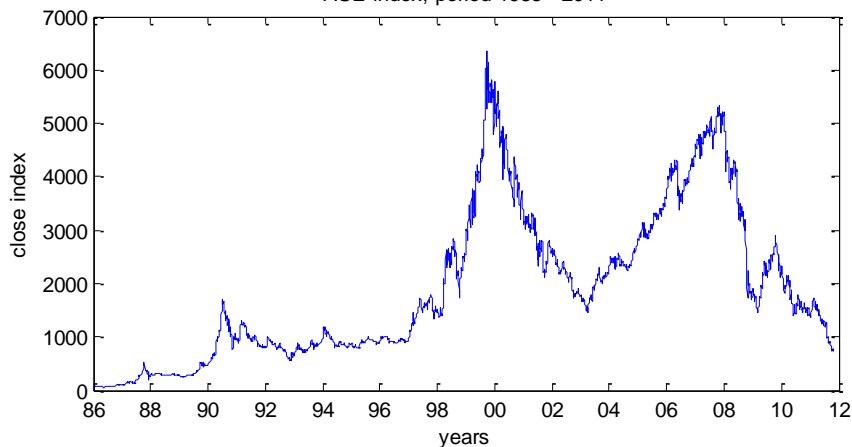
Αν υπάρχουν ταυτόχρονες παρατηρήσεις περισσότερων από μιας μεταβλητής
→ **πολυδιάστατη χρονοσειρά** [multivariate time series]

Στη μονοδιάστατη ή πολυδιάστατη χρονοσειρά εφαρμόζουμε μεθόδους και τεχνικές για να αντλήσουμε πληροφορίες για το σύστημα που την παράγει
→ **ανάλυση χρονοσειρών** [time series analysis]

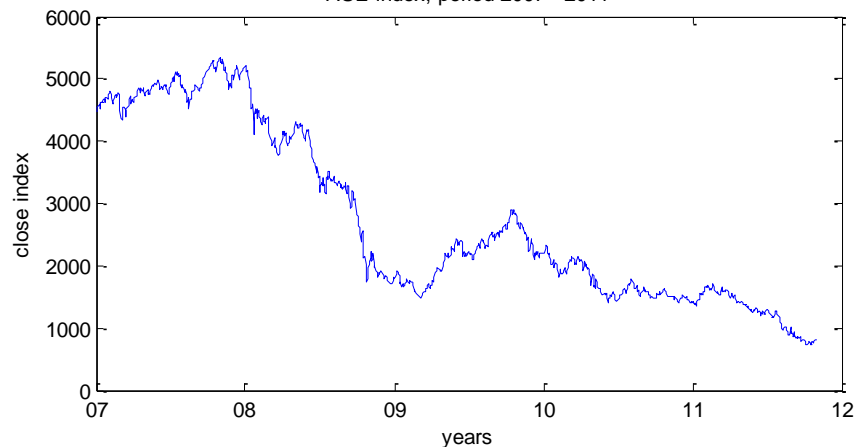
Η χρονοσειρά μπορεί να θεωρηθεί ως πραγματοποίηση μιας στοχαστικής ή καθοριστικής διαδικασίας (δυναμικό σύστημα) $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

Δείκτης και όγκος συναλλαγών Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών (ΧΑΑ)

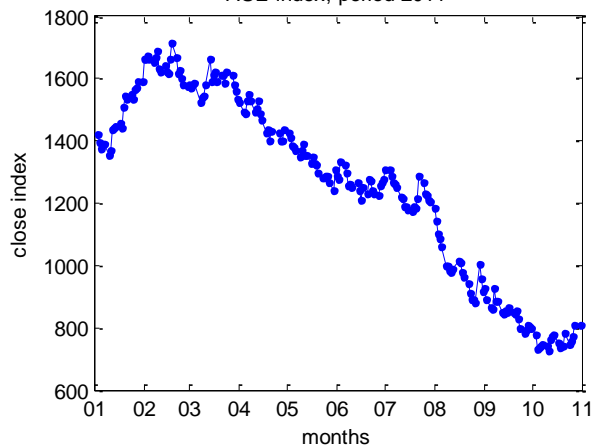
ASE index, period 1985 - 2011



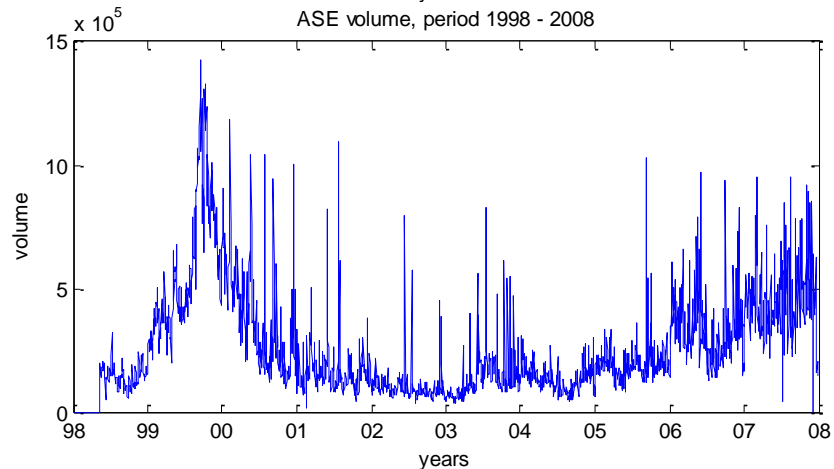
ASE index, period 2007 - 2011



ASE index, period 2011



ASE volume, period 1998 - 2008



Πρόβλεψη ?

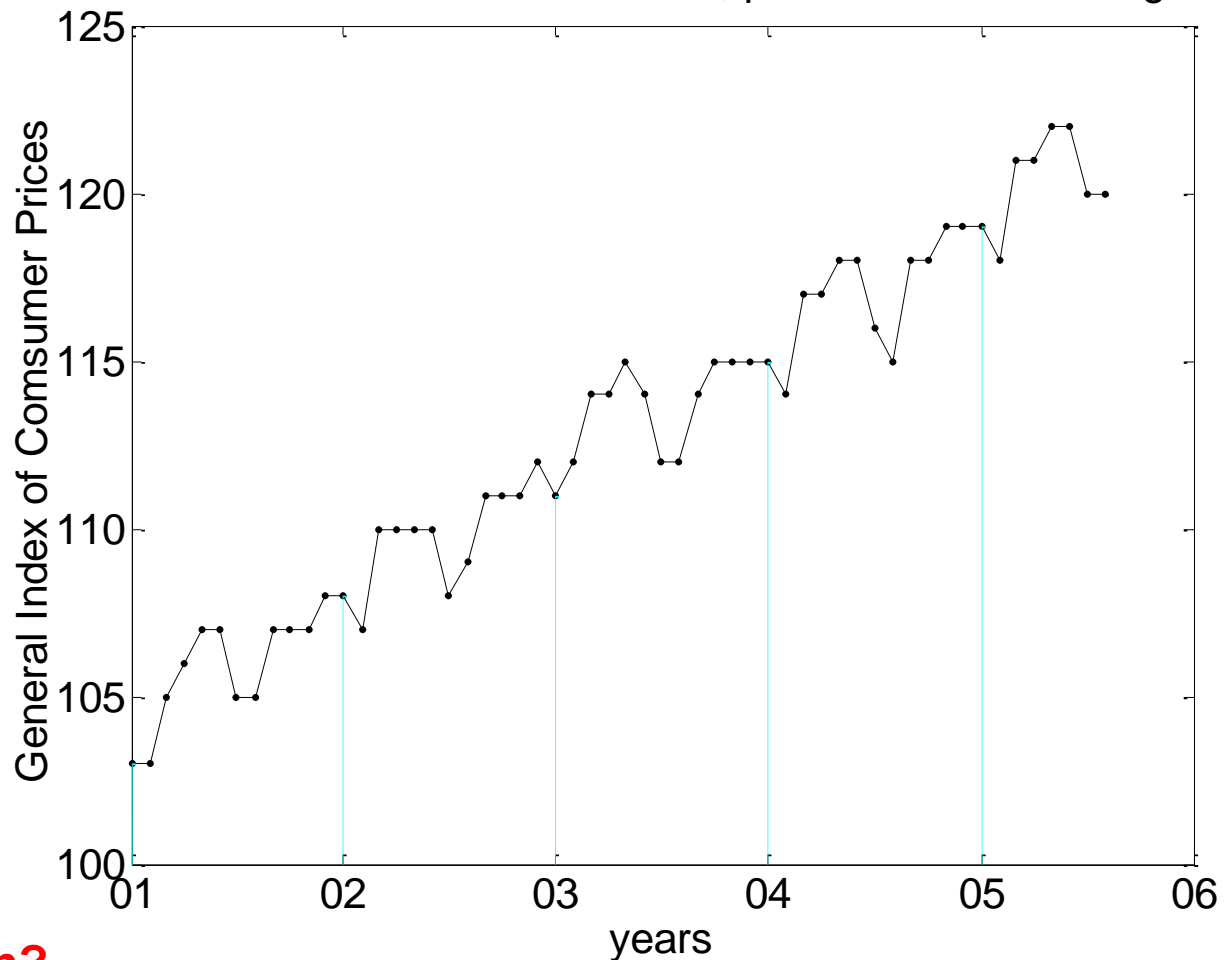
Ποια είναι η τιμή του δείκτη αύριο? Μεθαύριο?

**Δυναμικό σύστημα
Στοχαστική διαδικασία ?**

Ποιος είναι ο μηχανισμός της
ελληνικής χρηματιστηριακής αγοράς?

Γενικός δείκτης τιμών καταναλωτή (GICP)

General Index of Consumer Prices, period Jan 2001 - Aug 2005



Τάση?

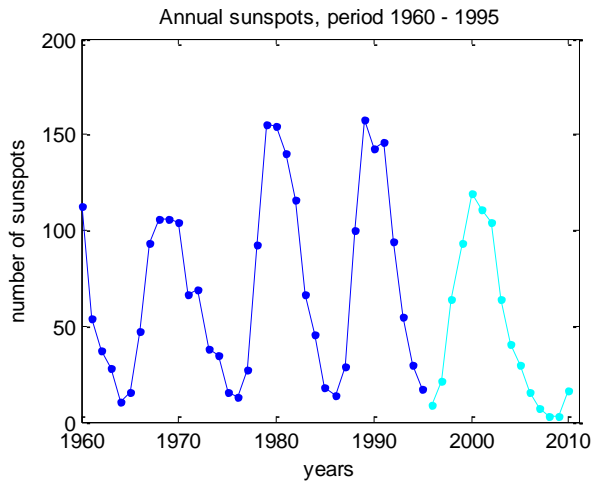
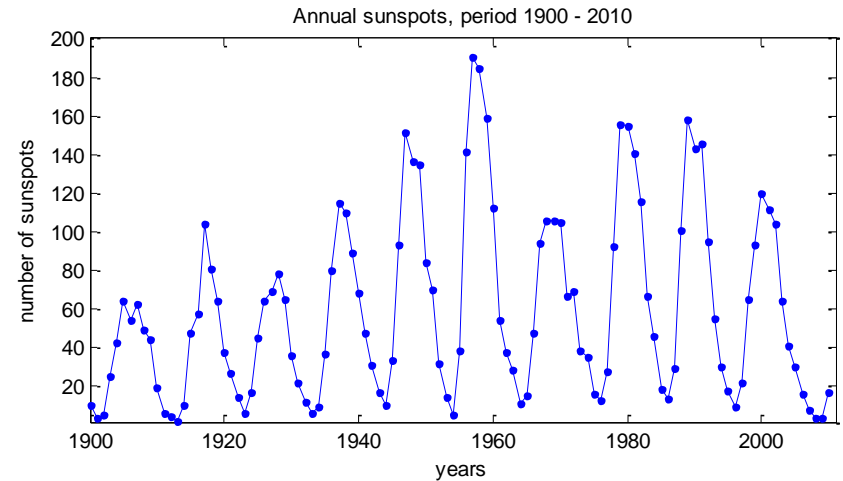
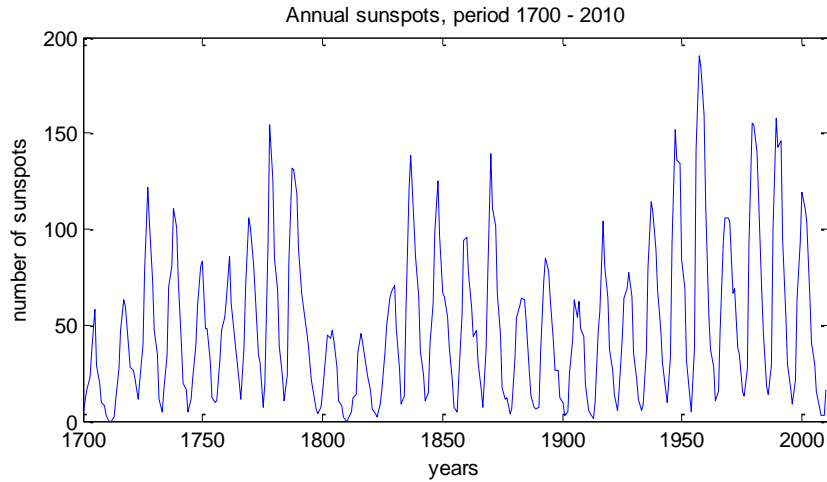
Εποχικότητα / περιοδικότητα?

Αυτοσυσχέτιση?

Αυτοπαλινδρόμηση?

Πρόβλεψη ?

Ετήσιες ηλιακές κηλίδες



Ποιος είναι ο μηχανισμός / σύστημα / διαδικασία που δημιουργεί τις ηλιακές κηλίδες?

Είναι **περιοδικό** σύστημα + **θόρυβος** ?

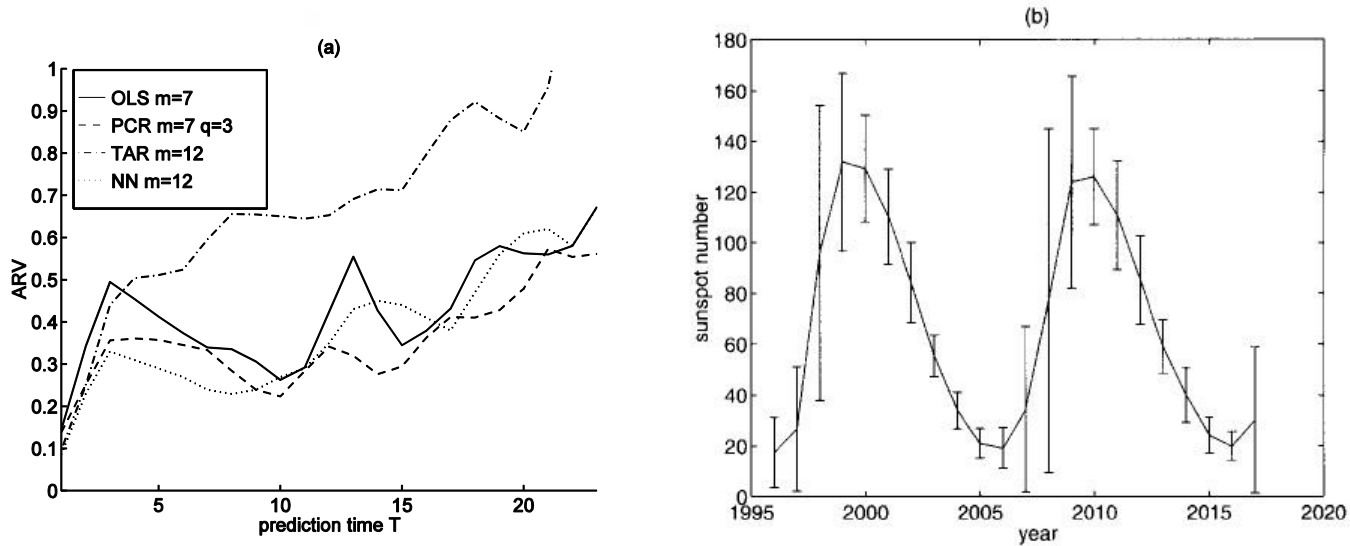
Είναι **στοχαστικό** σύστημα?

Είναι **χαοτικό** σύστημα?

Γνωρίζοντας τον αριθμό ηλιακών κηλίδων ως το 1995, ποιος θα είναι ο αριθμός τους το 1996 και μετά?

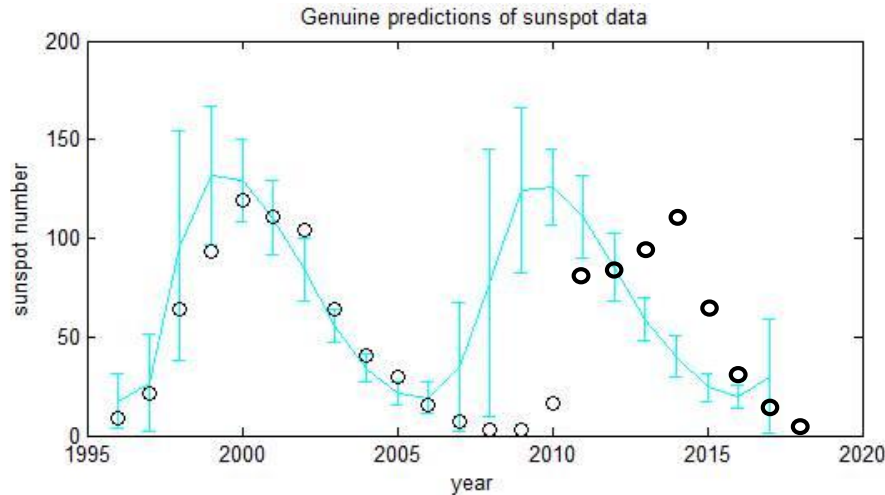
Ποιος θα είναι ο αριθμός των ηλιακών κηλίδων το 2011? 2012? ...

Σύγκριση μοντέλων



Αυθεντική πρόβλεψη

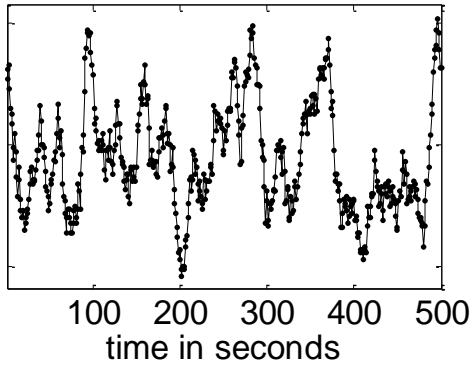
Fig. 9. (a) ARV for iterative multi-step prediction with different models. The test set is the period 1921–1955. The first prediction year of the test set increases with T , e.g. for $T = 1$ the first prediction starts in 1921 and for $T = 23$ in 1944. Thus the number of predictions in the test set decreases with T . The models used in each plot are shown in the legend. (b) The genuine out-of-sample iterative prediction of the sunspot numbers up to the year 2017 based on data up to 1995 using the PCR model with $q = 3$ and $m = 7$. The bars show two times the standard deviation of the point estimate for each step.



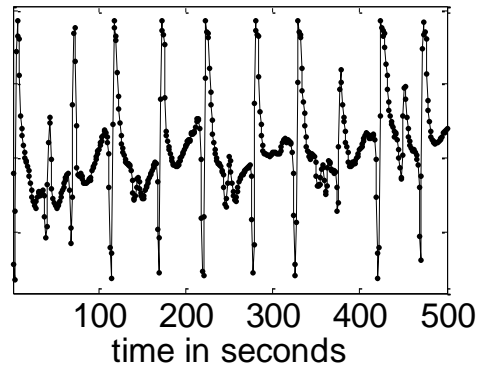
Τι σύστημα παράγει μια πραγματική χρονοσειρά;

Πραγματική χρονοσειρά

preictal EEG

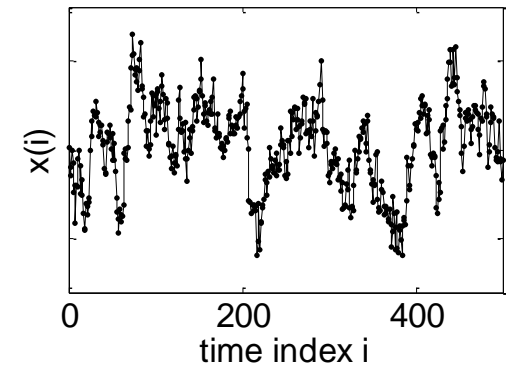


ictal EEG



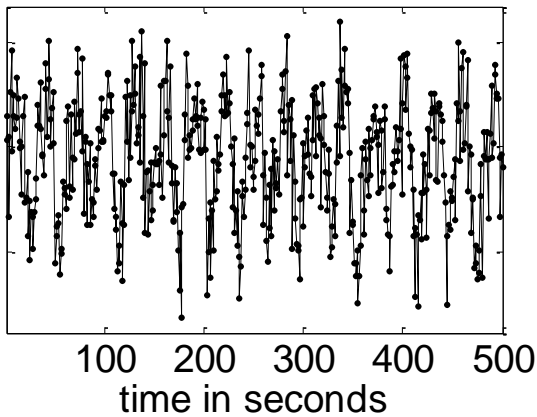
Πιθανά στοχαστικά μοντέλα

stochastic

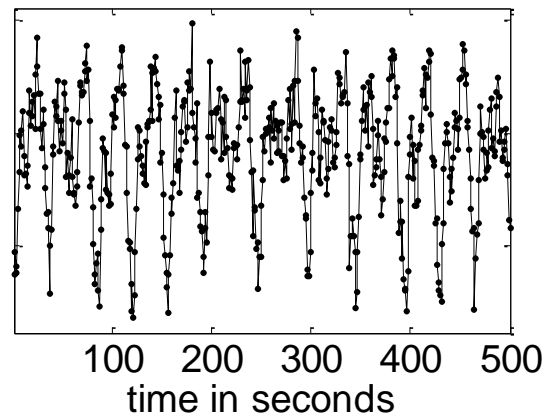


Πιθανά καθοριστικά μοντέλα

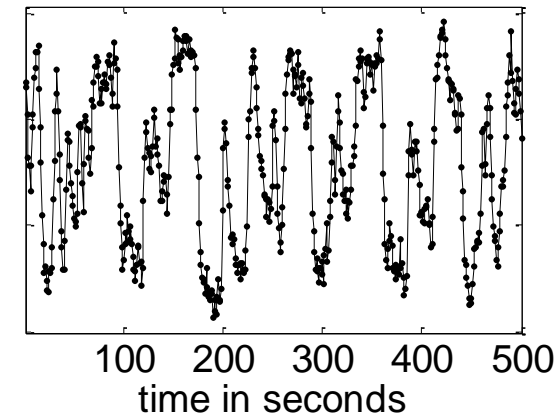
periodic + noise



low dimensional chaos

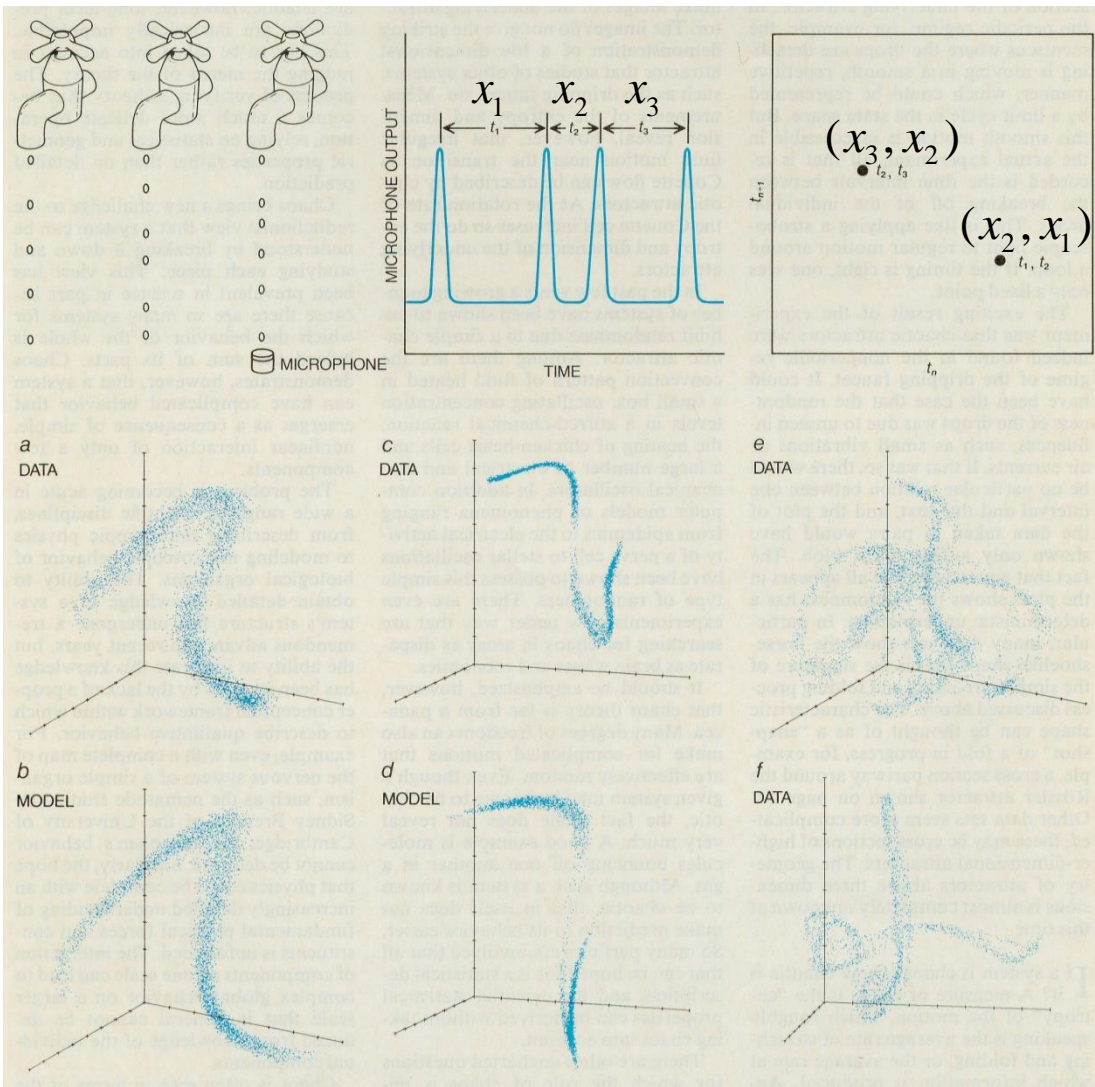


high dimensional chaos



Βρύση που στάζει

(dripping water faucet, UC Santa Cruz).



Crutchfield et al, Scientific American, 1986



Η παρατήρηση της βρύσης που στάζει έδειξε πως για κάποια ταχύτητα ροής, οι σταγόνες δεν τρέχουν σε σταθερά χρονικά διαστήματα.

Το διάγραμμα διασποράς των δεδομένων έδειξε ότι το στάξιμο των σταγόνων δεν είναι τυχαίο.

διάγραμμα διασποράς (x_i, x_{i-1}) (x_i, x_{i-1}, x_{i-2})

απεικόνιση Henon

$$s_i = 1 - 1.4s_{i-1}^2 + 0.3s_{i-2} \quad \text{χάος}$$

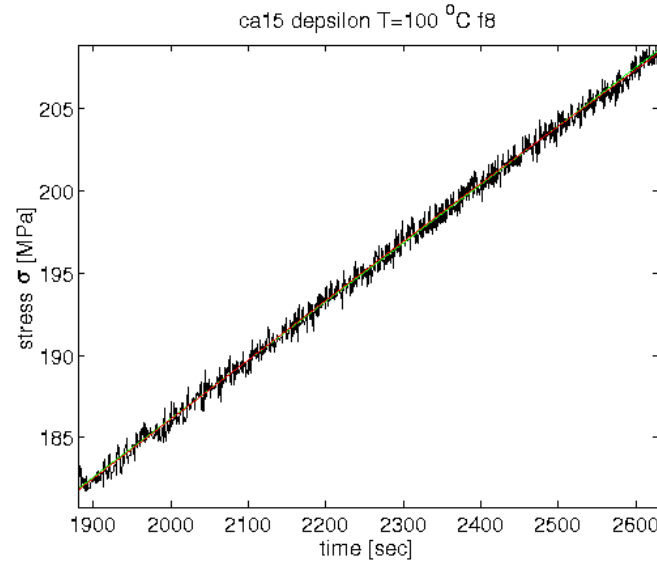
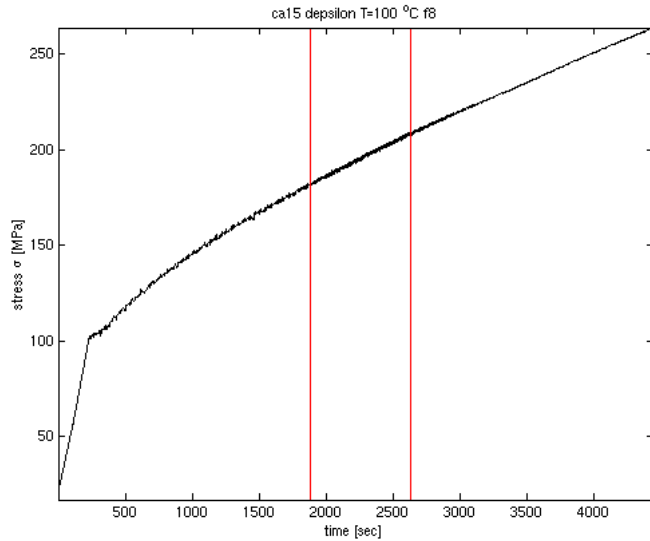
παρατηρούμενη μεταβλητή

$$x_i = s_i + w_i \quad w_i \text{ θόρυβος}$$

Στασιμότητα - τάση

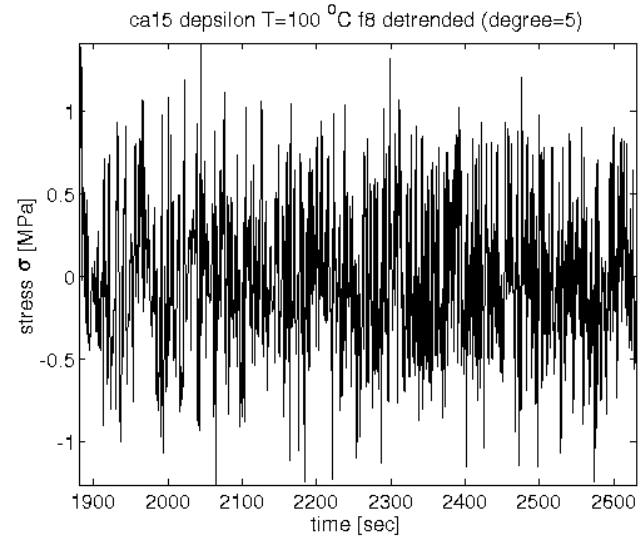
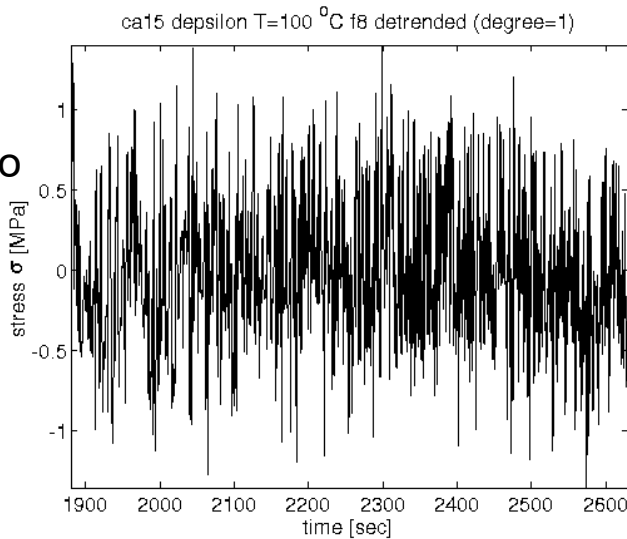
Τάση [trend]: αργή μεταβολή των τιμών x_t

Πλαστική παραμόρφωση



Καθοριστική τάση [deterministic trend]: κάποια συνάρτηση του χρόνου $\mu_t = f(t)$

Προσαρμογή
με πολυώνυμο
βαθμού 1



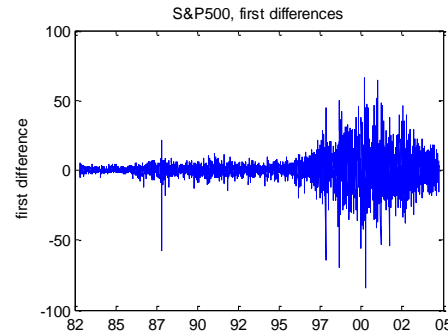
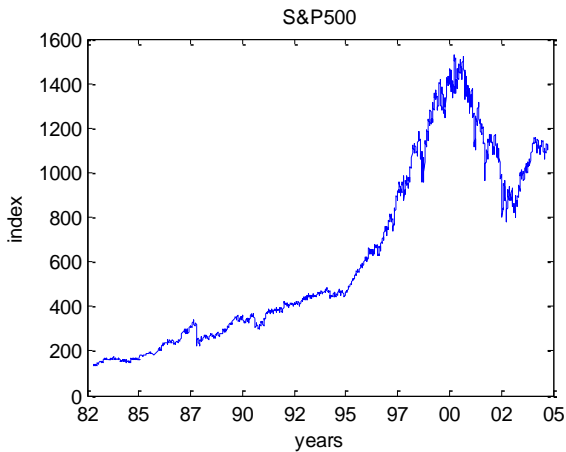
Προσαρμογή
με πολυώνυμο
βαθμού 5

Στοχαστική τάση [stochastic trend]: τυχαία αργή μεταβολή μ_t

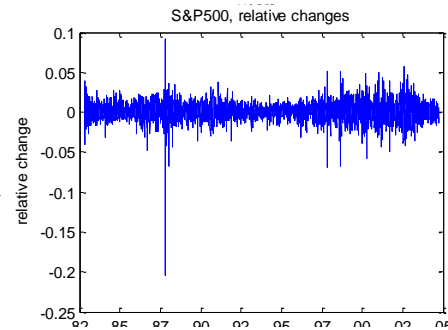
Y_t : η παρατήρηση ενός μεγέθους σε χρόνο t

$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ χρονοσειρά

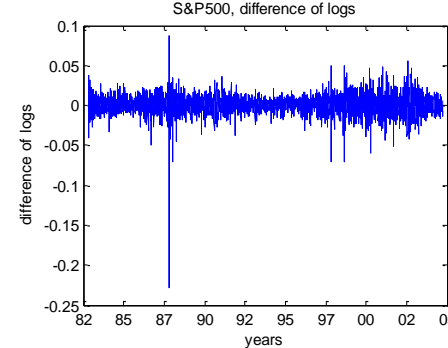
μετασχηματισμός



μεταβολή τιμής
 $x_t = y_t - y_{t-1}$



σχετική μεταβολή τιμής
 $x_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}$



μεταβολή λογαριθμού τιμής
 $x_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}$

Χρονική συσχέτιση

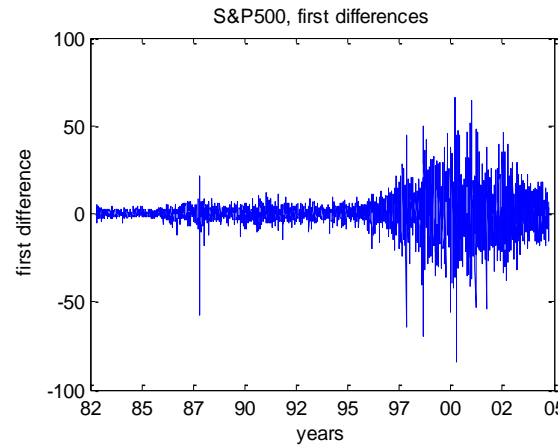
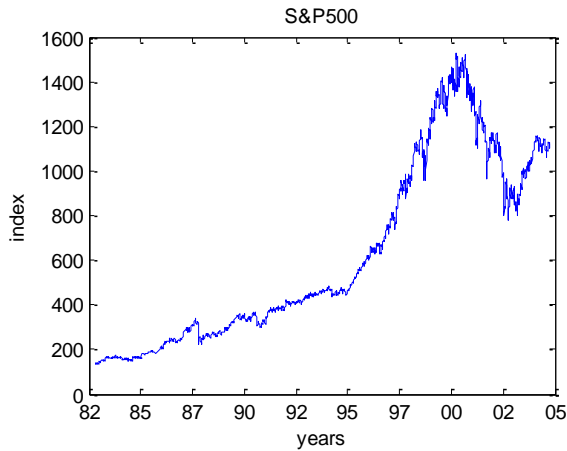
Στοχαστική διαδικασία

Y_t : η τιμή ενός μεγέθους

$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ χρονοσειρά

$\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

$\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

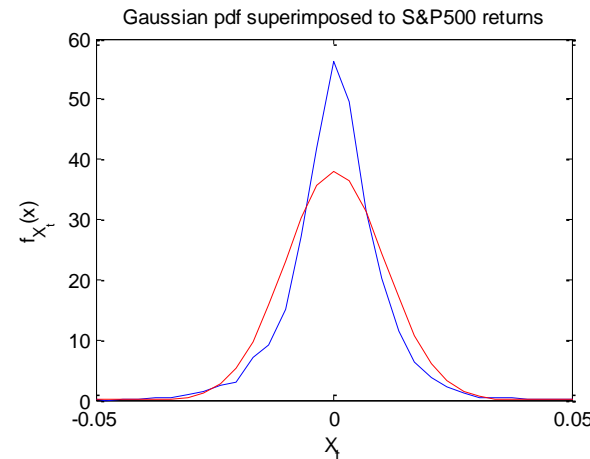
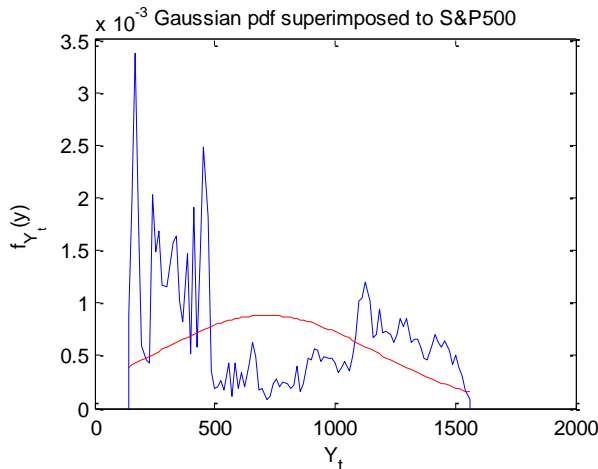


μεταβολή
τιμής

$$x_t = y_t - y_{t-1}$$

$f_{Y_t}(y)$

$f_{X_t}(x)$



Στατική περιγραφή ...
→ περιθώρια κατανομή

Δυναμική περιγραφή?
→ Χρονική συσχέτιση

Κατανομές και ροπές στοχαστικής διαδικασίας

Η στοχαστική διαδικασία περιγράφεται από την περιθώρια και τις κοινές κατανομές

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \in Z \\ \forall t_1, t_2 \in Z \\ \forall t_1, t_2, t_3 \in Z \\ \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} f_{Y_t}(y) = f_Y(y, t) \\ f_{Y_{t_1}, Y_{t_2}}(y_1, y_2) = f_Y(y_1, y_2, t_1, t_2) \\ f_{Y_{t_1}, Y_{t_2}, Y_{t_3}}(y_1, y_2, y_3) = f_Y(y_1, y_2, y_3, t_1, t_2, t_3) \\ \dots \end{array} \begin{array}{l} \text{περιθώρια κατανομή} \\ \text{κοινή κατανομή 2 μεταβλητών} \\ \text{κοινή κατανομή 3 μεταβλητών} \\ \dots \end{array}$$

Ροπή πρώτης τάξης (μέση τιμή) $E[Y_t] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y, t) dy = \mu_t$

Ροπή δεύτερης τάξης $E[Y_{t_1} Y_{t_2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1 y_2 f_Y(y_1, y_2, t_1, t_2) dy_1 dy_2 = \kappa(t_1, t_2)$

Κεντρική ροπή δεύτερης τάξης $E[(Y_{t_1} - \mu_{t_1})(Y_{t_2} - \mu_{t_2})] = \kappa(t_1, t_2) - \mu_{t_1} \mu_{t_2} = \gamma(t_1, t_2)$

Ροπές μεγαλύτερης τάξης ... αυτοδιασπορά [autocovariance]

Γενικά η κατανομή και οι ροπές μπορεί να αλλάζουν σε κάθε χρονικό βήμα

Στασιμότητα

Αυστηρή στασιμότητα [strict-sense stationarity]

Οι κατανομές είναι σταθερές στο χρόνο (ισοδύναμα όλες οι ροπές είναι σταθερές)

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \in Z \\ \forall t_1, t_2 \in Z \\ \forall t_1, t_2, t_3 \in Z \end{array} \right\} \begin{array}{l} f_{Y_t}(y) = f_Y(y, t) = f_{Y_t}(y) \\ f_{Y_{t_1}, Y_{t_2}}(y_1, y_2) = f_{Y_{t_1}, Y_{t_1-\tau}}(y_1, y_2) \\ f_{Y_{t_1}, Y_{t_2}, Y_{t_3}}(y_1, y_2, y_3) = f_{Y_{t_1}, Y_{t_1-\tau_1}, Y_{t_1-\tau_2}}(y_1, y_2, y_3) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{σταθερές} \\ \forall t \in Z \end{array} \right.$$

Ασθενή στασιμότητα [wide-sense stationarity]

Οι δύο πρώτες ροπές είναι σταθερές στο χρόνο

$$\left. \begin{array}{l} E[Y_t] = \mu \\ E[Y_{t_1} Y_{t_2}] = E[Y_t, Y_{t-\tau}] = \kappa(t, t-\tau) = \kappa(\tau) \\ \gamma(t_1, t_2) = \gamma(t, t-\tau) = \gamma(\tau) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{σταθερές} \\ \forall t \in Z \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{σταθερή μέση τιμή} \\ \text{και αυτοδιασπορά} \end{array}$$

$$\text{και για } \tau=0 \quad E[Y_t^2] = \kappa(0)$$

$$\sigma^2 = \gamma(0) = E[Y_t^2] - (E[Y_t])^2 = \kappa(0) - \mu^2$$

σταθερή διασπορά

Αυτοσυσχέτιση

Στάσιμη χρονοσειρά $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

Αυτοδιασπορά $\gamma(\tau) = E[(X_t - \mu)(X_{t-\tau} - \mu)] = E[X_t X_{t-\tau}] - (E[X_t])^2 = \kappa(\tau) - \mu^2$

Διασπορά $\sigma^2 = \gamma(0) = E[X_t^2] - (E[X_t])^2 = \kappa(0) - \mu^2$

Αυτοσυσχέτιση $\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$ Χρονική συσχέτιση μεταβλητών της $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$
σε υστέρηση τ .
Μετράει τη «μνήμη» της $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$
 $\rho(0) = 1$

Συμβολισμός: $\gamma(\tau) = \gamma_\tau$ $\rho(\tau) = \rho_\tau$

Παρατηρήσεις:

- $|\gamma_k| \leq \gamma_0$ και $|\rho_k| \leq 1$
- $\gamma_k = \gamma_{-k}$ και $\rho_k = \rho_{-k}$
- Πίνακας αυτοδιασπορών

$$\Gamma_n = \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \cdots & \cdots & \gamma_0 \end{vmatrix}$$

Πίνακας αυτοσυσχετίσεων

$$\mathbf{P}_n = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Κάποιες βασικές στοχαστικές διαδικασίες

1

$\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ **ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ.** [independent and identically distributed, **iid**]

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2) \dots P(X_n \leq x_n)$$

$$E[X_t] = 0$$

2

$\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ **Λευκός θόρυβος** [white noise, **WN**], ασυσχέτιστες τ.μ.

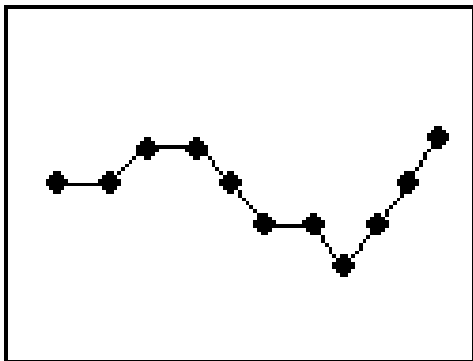
$$E[X_i X_j] = \delta_{ij} \sigma^2$$

3

$\{Y_t\}_{t=1}^{\infty}$ **τυχαίος περίπατος** [random walk, RW]

$$Y_t = Y_{t-1} + X_t = X_1 + X_2 + \dots + X_t \quad \{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty} \text{ iid} \quad E[X_t] = 0 \quad E[X_t^2] = \sigma^2$$

$$E[Y_{t+1} | Y_0, Y_1, \dots, Y_t] = Y_t$$



$$E[Y_t] = 0$$

$$E[Y_t^2] = t\sigma^2$$

?

Η διασπορά αυξάνει γραμμικά με το χρόνο!

$\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ Γκαουσιανή (κανονική) στοχαστική διαδικασία

Για κάθε τάξη p : $f_{X_t, X_{t-\tau_1}, \dots, X_{t-\tau_{p-1}}}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ είναι p -διάστατη Γκαουσιανή κατανομή

Η κανονική κατανομή καθορίζεται πλήρως από τις δύο πρώτες ροπές



αυστηρή στασιμότητα \equiv ασθενής στασιμότητα

Παράδειγμα

A τ.μ. $E[A] = 0$ $\text{Var}[A] = 1$

Στοχαστική διαδικασία: $X_t = A \sin(\omega t + \theta)$ $\theta \sim U[-\pi, \pi]$ θ και A ανεξάρτητα

Είναι ασθενώς στάσιμη;

- $E[X_t] = E[A]E[\sin(\omega t + \theta)] = 0$

- $E[X_t X_{t+\tau}] = E\left[A^2 \sin(\omega t + \theta) \sin(\omega(t + \tau) + \theta)\right] = \dots = \frac{1}{2} \cos(\omega \tau)$



Οι ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης δεν εξαρτώνται από το χρόνο t .

Δειγματική αυτοδιασπορά / αυτοσυσχέτιση

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ χρονοσειρά

Δειγματική μέση τιμή $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t$

- αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής μ της χρονοσειράς



Δειγματική αυτοδιασπορά

$$c(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{t=\tau+1}^n (x_t x_{t-\tau} - \bar{x}^2) \quad \tau = 0, 1, \dots, n-1$$

$$c(0) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_t^2 - \bar{x}^2)$$

Συμβολισμός

$$c(\tau) \equiv c_\tau$$

Άλλη εκτίμηση αυτοδιασποράς

$$c'(\tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{t=\tau+1}^n (x_t x_{t-\tau} - \bar{x}^2)$$

Μεροληπτικοί εκτιμητές:

$$E[c_\tau] \cong \gamma_\tau - \frac{\tau}{n} \gamma_\tau - \left(\frac{n-\tau}{n}\right) \text{Var}[\bar{x}]$$

η μεροληψία αυξάνει με την υστέρηση τ

$$E[c'_\tau] \cong \gamma_\tau - \text{Var}[\bar{x}]$$

Δειγματική αυτοσυσχέτιση

$$r(\tau) = \frac{c(\tau)}{c(0)} \quad r(0) = 1$$

Συμβολισμός

$$r(\tau) \equiv r_\tau$$

Για μεγάλο n : $r_\tau \sim N(\rho_\tau, \text{Var}[r_\tau])$

$$\text{Var}[r_\tau] \cong \frac{1}{n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\rho_m^2 + \rho_{m+\tau} \rho_{m-\tau} + 2\rho_\tau^2 \rho_m^2 - 4\rho_\tau \rho_m \rho_{m-\tau})$$

ΤΥΠΟΣ
Bartlett

$$\text{Var}[r_\tau] \cong \frac{1}{n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_m^2 \quad \text{πολύ μεγάλο } n$$

Αυτοσυσχέτιση λευκού θορύβου

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ χρονοσειρά λευκού θορύβου $\rho_\tau = 0, \forall \tau \neq 0$

$$r_\tau \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right) \quad \boxed{?}$$

Έλεγχος σημαντικότητας αυτοσυσχέτισης

$$H_0 : \rho_\tau = 0 \quad H_1 : \rho_\tau \neq 0$$

Απορριπτική περιοχή: $R = \left\{ r_t \mid \left| \frac{r_t}{\sqrt{1/n}} \right| > z_{1-\alpha/2} \right\}$ για στάθμη σημαντικότητας α

Ζώνη μη-σημαντικής αυτοσυσχέτισης: $\pm z_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}}$ για $\alpha=0.05 \simeq \pm \frac{2}{\sqrt{n}}$

Παράδειγμα

Για μια χρονοσειρά 200 παρατηρήσεων δίνονται οι 10 πρώτες αυτοσυσχετίσεις

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-0.38	-0.28	0.11	-0.08	0.02	0.00	0.01	0.07	-0.08	0.05

Υποθέτοντας ότι η χρονοσειρά είναι τυχαία ($H_0: \rho=0$): $\text{Var}[r_\tau] \simeq \frac{1}{200} = 0.005$

για $\alpha=0.05$, το 95% των αυτοσυσχετίσεων αναμένουμε να βρίσκεται στο διάστημα

$$\pm 1.96 * \frac{1}{\sqrt{200}} = \pm 1.96 * 0.07 = \pm 0.139$$

$\rho_1 \neq 0, \rho_2 \neq 0$ και $\rho_\tau \neq 0$ για $\tau=3,4,\dots$