Χρονοσειρές - Μάθημα 8
Μη-γραμμική ανάλυση χρονοσειρών

Γραμμική ανάλυση / Γραμμικά μοντέλα

αυτοσυσχέτιση ⟷ AR μοντέλο

ARMA(p,q) μοντέλο $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + z_t + \theta_1 z_{t-1} + \cdots + \theta_q z_{t-q}$

Πλεονεκτήματα:

1. Απλά
2. Κανονική διαδικασία, ανεπτυγμένη θεωρία για στοχαστικές διαδικασίες και στατιστική συμπερασματολογία
3. Χρήσιμα στις εφαρμογές

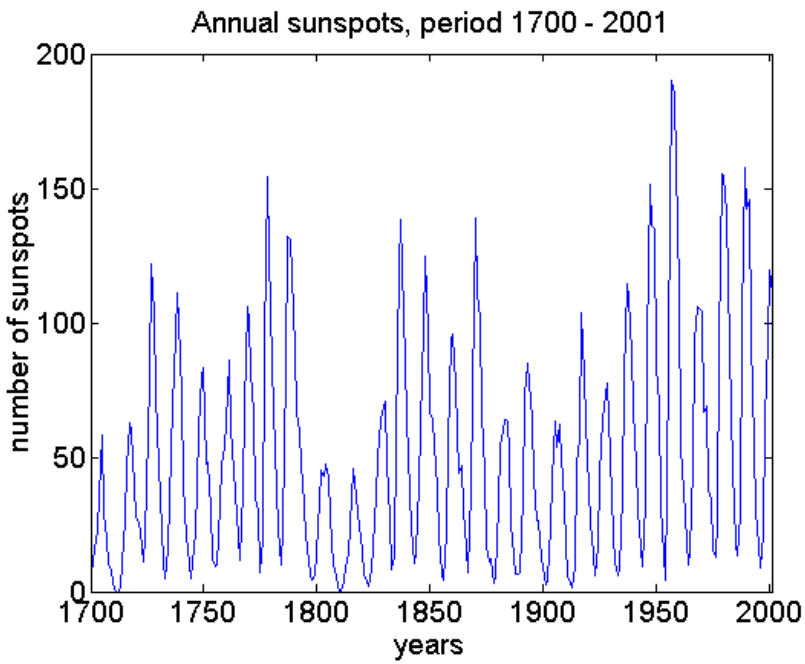
Μειονεκτήματα:

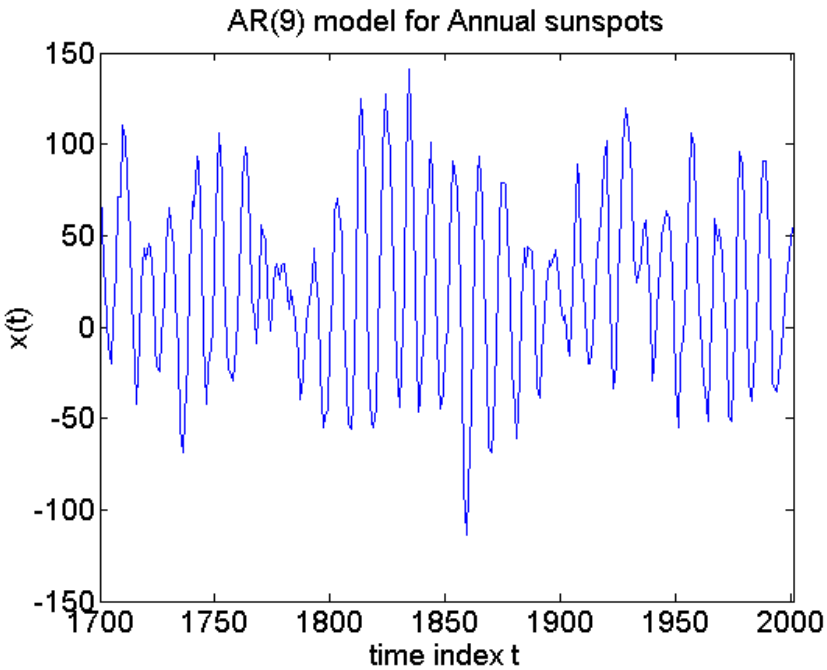
1. Δεν εξηγούν μη-κανονικές μορφές της χρονοσειράς
   - ασυμμετρία δεδομένων (κατανομής)
   - μη-αντιστρεψιμότητα στο χρόνο
   - «ξεσπάσματα»
2. Καθοριστικό μέρος:
   - σταθερό οριακό σημείο
   - ασταθές σύστημα
   - ταλάντωση μεταξύ σημείων

Μη-γραμμική ανάλυση χρονοσειρών

περιγραφή μη-κανονικών χαρακτηριστικών

εξήγηση / εντοπισμός σύνθετων καθοριστικών δομών


Annual sunspots, period 1700 - 2001
number of sunspots
years
200
150
100
50
0
1700
1750
1800
1850
1900
1950
2000


AR(9) model for Annual sunspots
x(t)
time index t
150
100
50
0
-50
-100
-150
1700
1750
1800
1850
1900
1950
2000

Γενικό μη-γραμμικό μοντέλο

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}, \varepsilon_t)$$

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}) + \varepsilon_t$$

Προσθετικός θόρυβος

$$\boldsymbol{X}_{t-1} = \left[X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}\right]' \in \mathbb{R}^p \qquad f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$$

$$\boxed{f \quad ?}$$

Γραμμικό AR μοντέλο

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots \phi_p X_{t-p} + \theta \varepsilon_t$$

Γενικεύσεις / επεκτάσεις του γραμμικού AR μοντέλου

$\boxed{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p}$ →

- σταθερά (γραμμικό AR)
- $\left\{ \begin{array}{l} \phi_1^{(1)}, \phi_2^{(1)}, \ldots, \phi_p^{(1)} \\ \phi_1^{(2)}, \phi_2^{(2)}, \ldots, \phi_p^{(2)} \\ \\ \phi_1^{(l)}, \phi_2^{(l)}, \ldots, \phi_p^{(l)} \end{array} \right.$ *τμηματικά μοντέλα*
  - SETAR
  - Μαρκοβιανά
- τυχαίες μεταβλητές
  - RCA
  - BL

$\boxed{\theta}$ →

- σταθερό (γραμμικό AR, ARMA)
- συνάρτηση των X_t
  - ARCH
  - GARCH

Αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα με αυτό-διεγερμένο κατώφλι SETAR

Διαμερισμός του $\mathbb{R}^p$

- επιλογή υστέρησης *d*,
- διαμερισμός του $\mathbb{R}$ για το X_{t-d}

$$\{r_0, r_1, \ldots, r_{l-1}, r_l\}$$

$$-\infty = r_0 < r_1 < \cdots < r_l = +\infty$$

$$R_i = (r_{i-1}, r_i],\ i = 1, \ldots, l$$

$$\mathbb{R} = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_l$$

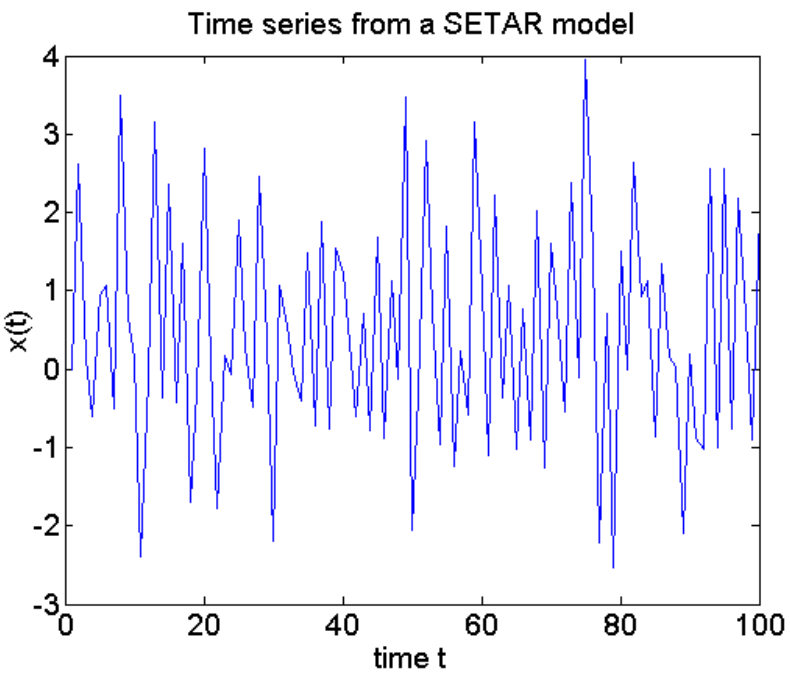
SETAR

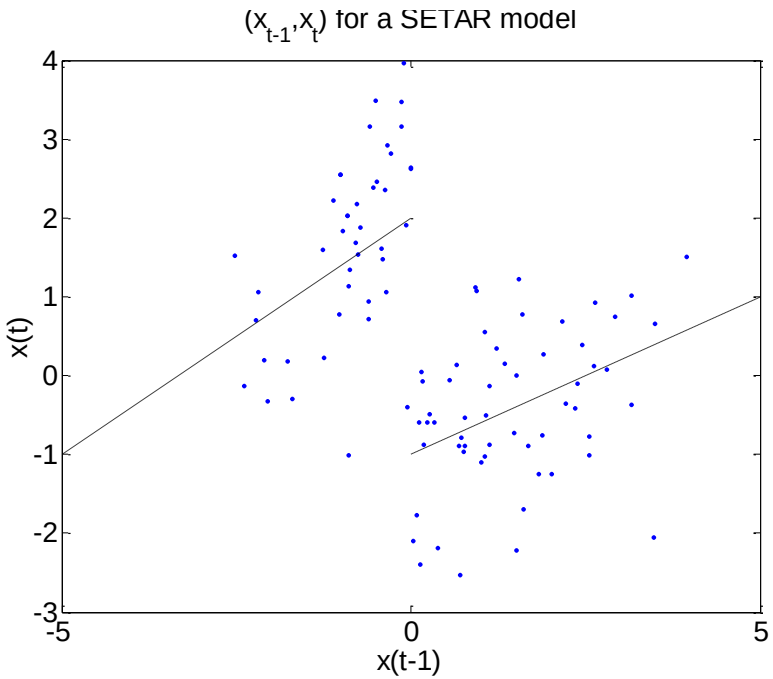
$$X_t = \phi_1^{(j)} X_{t-1} + \phi_2^{(j)} X_{t-2} + \ldots \phi_p^{(j)} X_{t-p} + \theta^{(j)} \varepsilon_t$$

όταν $X_{t-d} \in R_j$

Παράδειγμα SETAR

$$X_t = \begin{cases} 2.0 + 0.6X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{αν } X_{t-1} \le 0 \\ -1.0 + 0.4X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{αν } X_{t-1} > 0 \end{cases} \qquad \varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0,1)$$





AR μοντέλα με πιθανοκρατική επιλογή του κατωφλιού

Εκθετικά AR μοντέλα (exponential autoregressive models, EAR)

$$X_t = \phi_1^{(j)} X_{t-1} + \phi_2^{(j)} X_{t-2} + \varepsilon_t \qquad j = \begin{cases} 1 & \text{με } \pi \\ 2 & \text{με } 1-\pi \end{cases}$$

Παράδειγμα

$$\phi_1^{(1)} = \alpha_1 \quad \phi_2^{(1)} = 0 \qquad\qquad \phi_1^{(2)} = 0 \quad \phi_2^{(2)} = \alpha_2$$

AR μοντέλα με περιοδικούς συντελεστές (AR models with periodic coefficients)

$$X_t = \phi_1^{(j)} X_{t-1} + \phi_2^{(j)} X_{t-2} + \varepsilon_t \qquad j = \begin{cases} 1 & \text{όταν } t = 2k \\ 2 & \text{όταν } t = 2k+1 \end{cases}$$

AR μοντέλα με Μαρκοβιανούς συντελεστές (Markov chain driven AR models)

Επιλογή κατωφλίου δίνεται από Μαρκοβιανή αλυσίδα

$$J_t = j \in \{1,2,\ldots,l\}$$

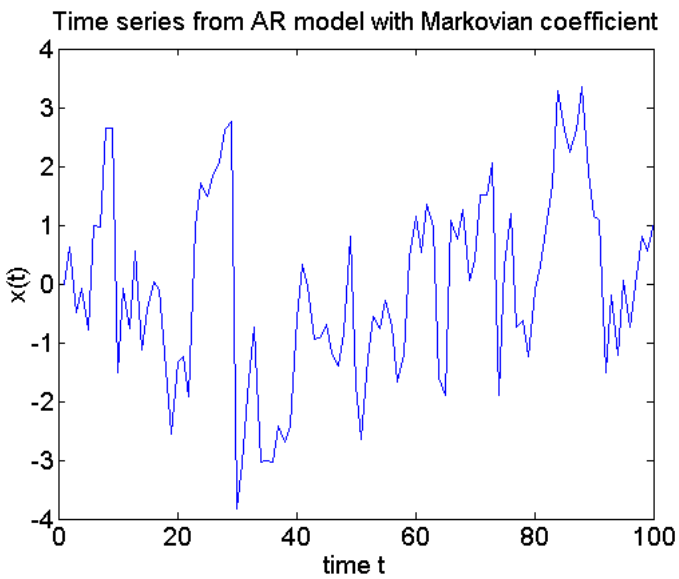
Πίνακας μετάβασης

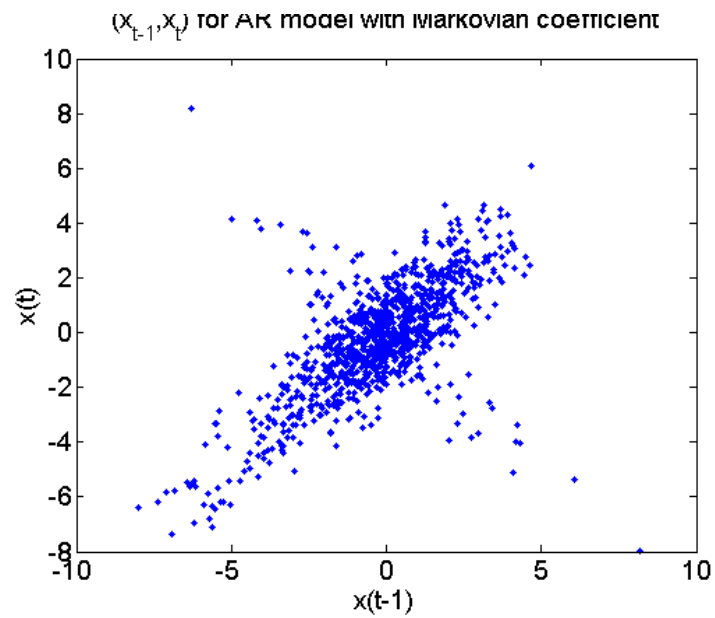
$$P(J_t = j \mid J_{t-1} = i)$$

Παράδειγμα

$$X_t = \phi^{(J_t)} X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \phi^{(1)} = -0.9 \qquad \phi^{(2)} = 0.9$$

$$P(J_t = j \mid J_{t-1} = i) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$





Τμηματικά πολυωνυμικά μοντέλα

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}) + \varepsilon_t$$

$$\Downarrow$$

$$X_t = p_m(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}) + \varepsilon_t$$

πολυώνυμο τάξης *p* βαθμού *m*

Παράδειγμα

$$X_t = aX_{t-1}(1 - X_{t-1}) = aX_{t-1} - aX_{t-1}^2 \qquad a \neq 1$$

λογιστική απεικόνιση

Δύο σημεία ισορροπίας: 0 και $(a-1)/a$

Κλασματικά αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα

Λόγος δύο πολυωνύμων

Παράδειγμα

$$X_t = \frac{a_0 + \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-1}^j}{b_0 + \sum_{j=1}^{q} b_j X_{t-1}^j} + \varepsilon_t$$

$$0 \leq p \leq q+1$$

$$a_p \neq 0$$

$$b_q \neq 0$$

AR μοντέλα με τυχαίους συντελεστές, RCA

AR(1) με πολλαπλασιαστικό θόρυβο $X_t = \varepsilon_t X_{t-1}$

RCA

$$\boxed{X_t = \sum_{i=1}^{p} \left(b_i + B_i(t)\right) X_{t-i} + \varepsilon_t}$$

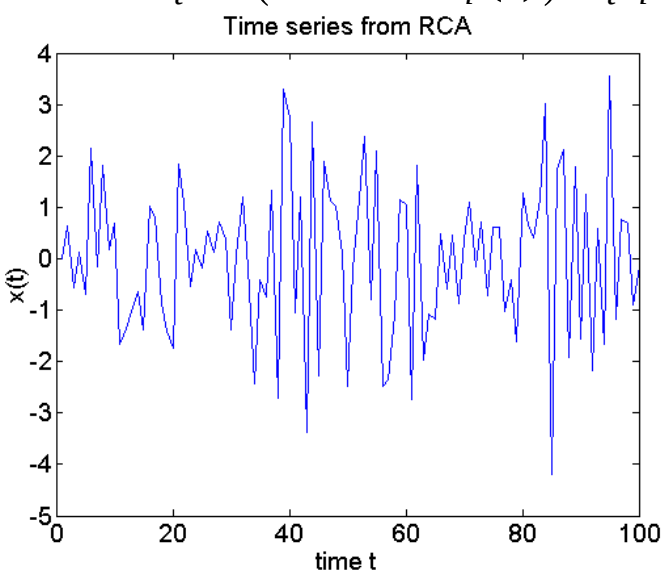
$\phi_i = b_i + B_i(t)$

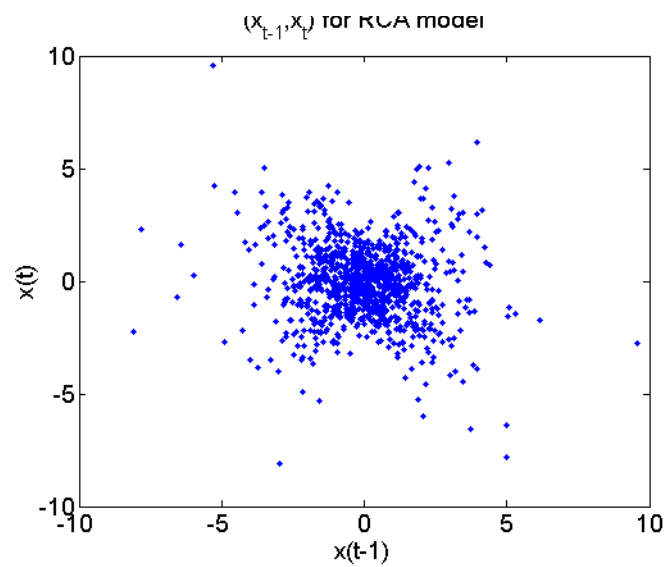
- b_i σταθερά
- $B_1(t), B_2(t), \ldots, B_p(t)$ τυχαία με μέση τιμή 0

ανεξάρτητα των ε_t, X_t

<u>Παράδειγμα</u>

$$X_t = \left(-0.1 + B_i(t)\right) X_{t-i} + \varepsilon_t \qquad B_t \sim \mathrm{N}(0, 0.9^2)$$





Διγραμμικά μοντέλα, BL

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \left(a_i + A_i(t)\right) X_{t-i} + \varepsilon_t \qquad A_i(t) = \sum_{k=1}^{s} b_{jk} \varepsilon_{t-k}$$

συντελεστές $\phi_i = a_i + A_i(t)$

«Διγραμμικά» γιατί:

- Αν $s \le t,\ \varepsilon_s = \text{const} \ \rightarrow\ X_t$ γραμμικό ως προς το $X_s,\ s < t$
- Αν $s < t,\ X_s = \text{const} \ \rightarrow\ X_t$ γραμμικό ως προς το $\varepsilon_s,\ s \le t$

BL βαθμού 1: $X_t = aX_{t-1} + b\varepsilon_t X_{t-1} + \varepsilon_t$

Αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα με χρονικά μεταβαλλόμενους συντελεστές (time-varying autoregressive models) για μη-στάσιμες χρονοσειρές. Παρουσίαση, εκτίμηση παραμέτρων, παραδείγματα / εφαρμογές

AR μοντέλα με δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα

Μοντέλο πολλαπλασιαστικού θορύβου

ARCH

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{V_t} \qquad V_t = \gamma + \phi_1 X_{t-1}^2 + \cdots + \phi_p X_{t-p}^2 \qquad \begin{array}{l} \gamma > 0 \\ \phi_i \geq 0 \\ \varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2) \end{array}$$

$$\{X_t\} \sim \text{ARCH} \Rightarrow \{X_t^2\} \sim \text{BL}$$

GARCH

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{V_t} \qquad V_t = \gamma + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \psi_i V_{t-i} \qquad \begin{array}{l} \gamma > 0 \\ \phi_i \geq 0 \\ \psi_i \geq 0 \end{array}$$

Διαδικασία ανάλυσης με στατιστικά μη-γραμμικά μοντέλα

1. *Επιλογή μοντέλου*

M υποψήφια μοντέλα, *m = 1,...,M*

$$\mathrm{AIC}(m) = -2\ln g\left(\boldsymbol{x} \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}_m(\boldsymbol{x})\right) + 2r$$

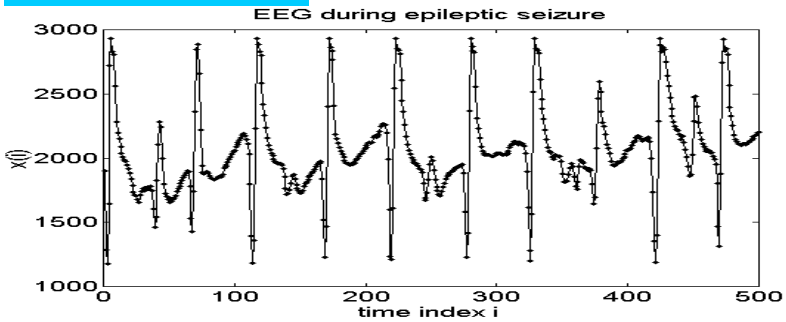
2. *Εκτίμηση παραμέτρων*
   - μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας
   - μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

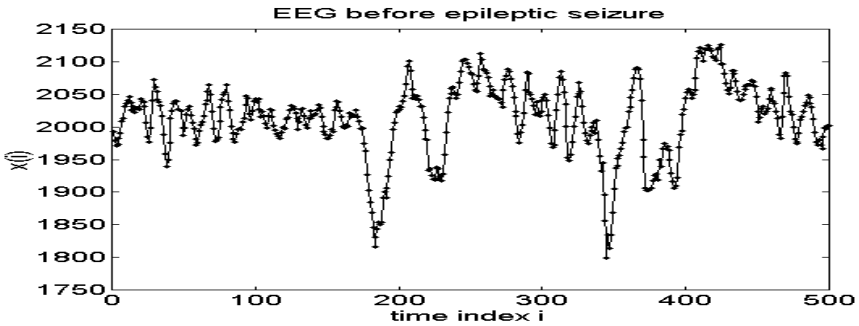
3. *Διαγνωστικός έλεγχος*

σφάλματα (υπόλοιπα): → ασυσχέτιστα
σφάλματα (υπόλοιπα): → ακολουθούν κανονική κατανομή

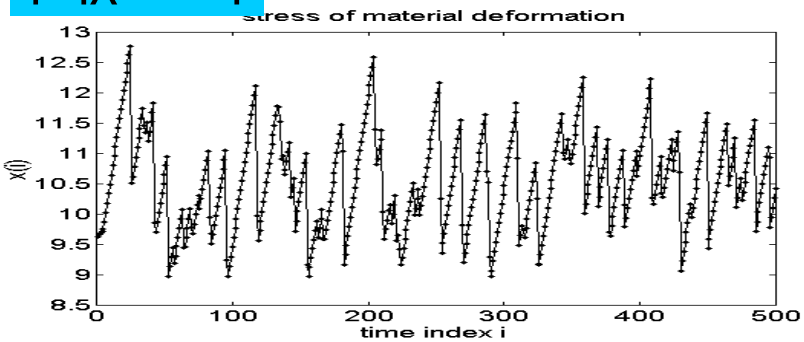
Πραγματικές χρονοσειρές

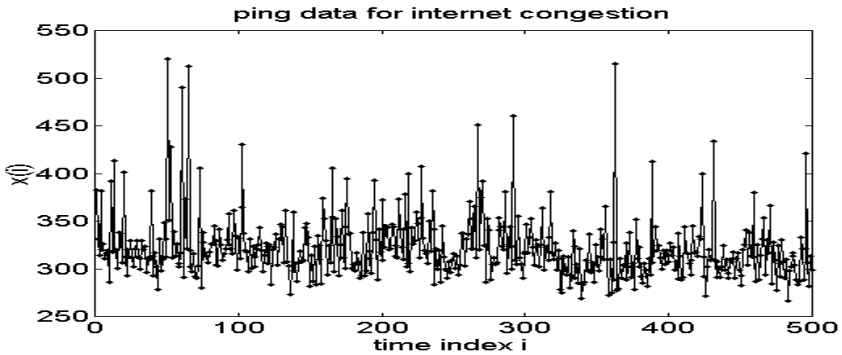
φυσιολογία



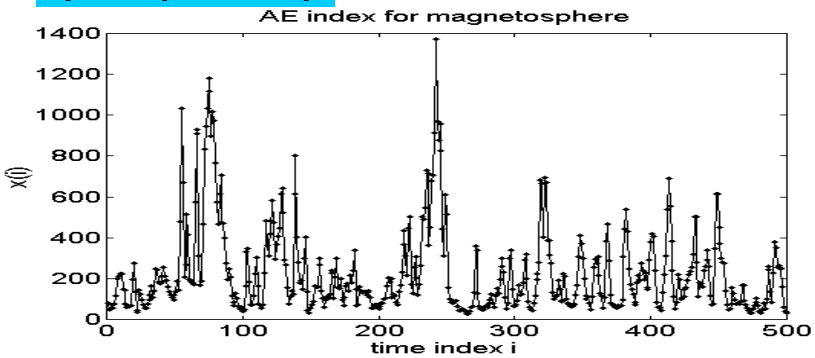


μηχανική





γεωφυσική



οικονομία

Μη-γραμμική ανάλυση χρονοσειρών και δυναμικά συστήματα

Χρονοσειρά $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Υπόθεση:

➡ Παρατήρηση: $\boxed{x_t = h(\boldsymbol{s}_t)}$

$\boldsymbol{s}_t \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$: τροχιά δυναμικού συστήματος

$h : \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \mapsto \mathbb{R}$ συνάρτηση παρατήρησης

➡ Μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα $\boxed{\boldsymbol{s}_t = \boldsymbol{f}^t(\boldsymbol{s}_0)}$

$\boldsymbol{s}_0$: το διάνυσμα θέσης για χρόνο 0

$\boldsymbol{f}^t : \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \mapsto \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ συνάρτηση του συστήματος

t : συνεχής ή διακριτός χρόνος

Για χρονοσειρές → συστήματα απώλειας ενέργειας

⬇

Τροχιά στο $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ ⟶ **ελκυστής**

Ελκυστής:

- ευσταθές σημείο ισορροπίας
- πεπερασμένο σύνολο σημείων ισορροπίας
- οριακός κύκλος
- τόρος
- παράξενος ελκυστής

μπορεί να σχηματιστεί από γραμμικό σύστημα

δε μπορεί να σχηματιστεί από γραμμικό σύστημα

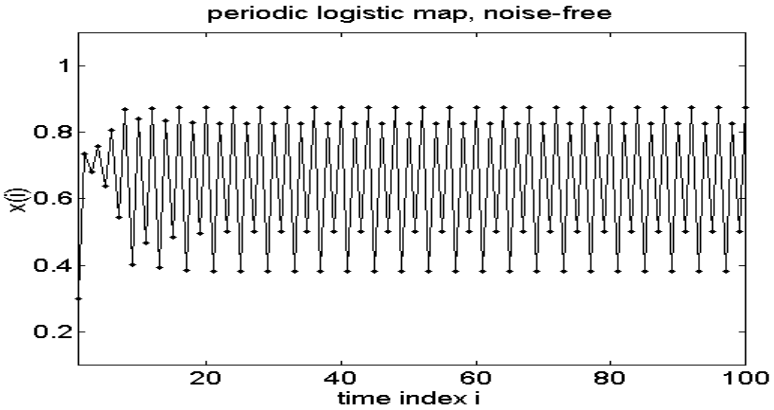
αυτό-ομοιότητα – μορφοκλασματικά

ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες ⇨ **χάος**

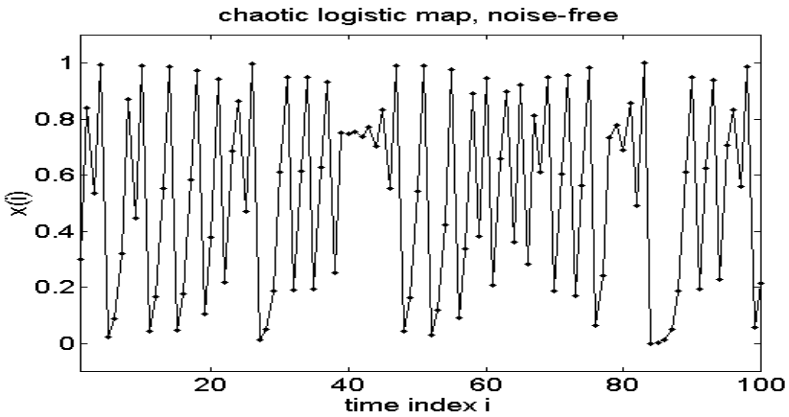
Μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα, απεικονίσεις (διακριτός χρόνος)

Λογιστική απεικόνιση $s_i = a\, s_{i-1}(1 - s_{i-1})$

περιοδικό a=3.52

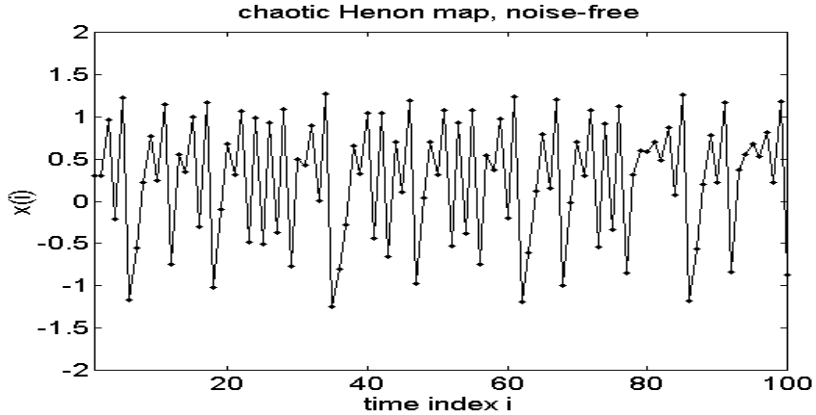


χαοτικό a=4



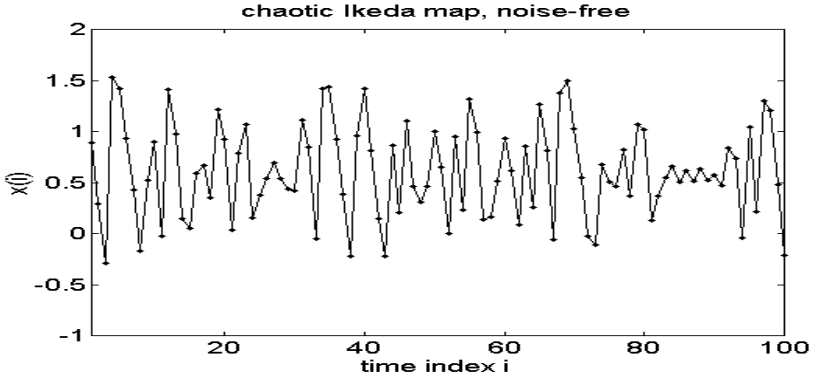
χαοτική απεικόνιση **Henon**

$s_i = 1 - 1.4\, s_{i-1}^2 + 0.3 s_{i-2}$



χαοτική απεικόνιση **Ikeda**

$$s_k = 1 + 0.9 s_{k-1} \exp\left(0.4i - \frac{6i}{1 + |s_{k-1}|^2}\right)$$



Μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα,ροές (συνεχής χρόνος)

Σύστημα Lorenz:

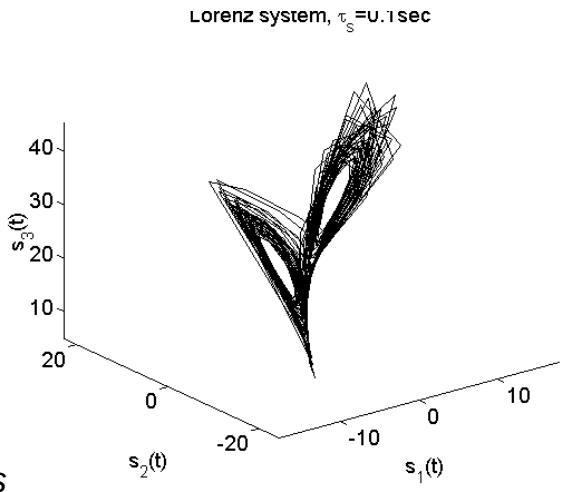
$$\dot{s}_1 = a(s_2 - s_1)$$

$$\dot{s}_2 = bs_1 - s_2 - s_1 s_3$$

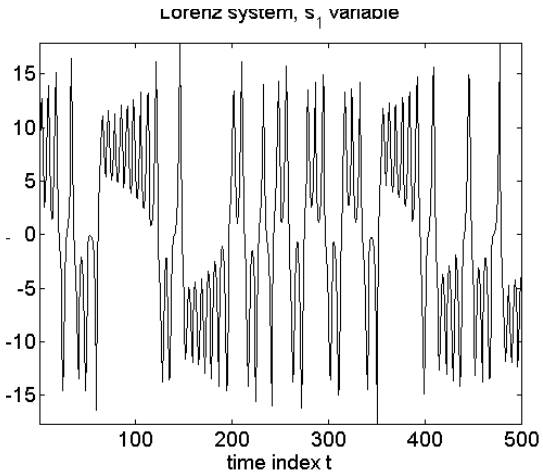
$$\dot{s}_3 = -cs_3 + s_1 s_2$$

$$a = 10 \quad b = 28 \quad c = \frac{8}{3}$$

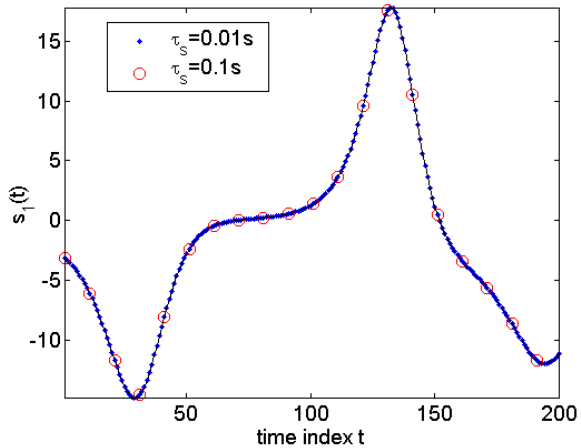
s_1, s_2, s_3



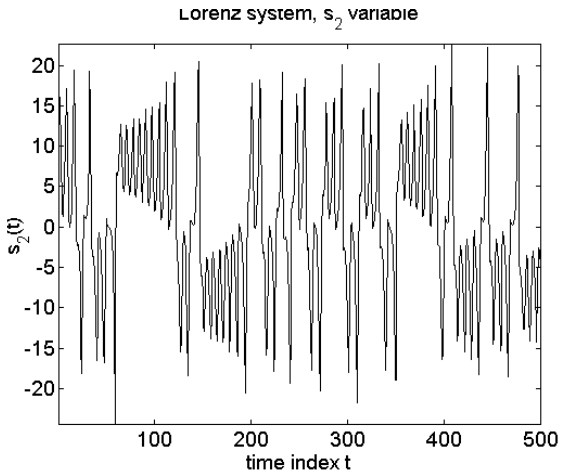
s_1



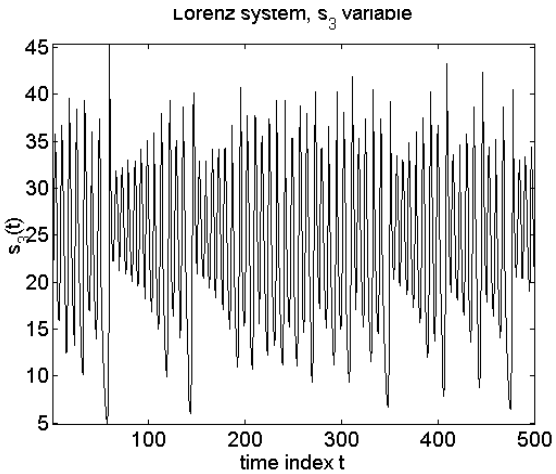
Χρόνος δειγματοληψίας τ_s



s_2



s_3



Χρονοσειρές με θόρυβο

Παρατήρηση

$$x_t = h(\boldsymbol{s}_t) \xrightarrow{\text{θόρυβο}} x_t = h(\boldsymbol{s}_t) + w_t$$

θόρυβος παρατήρησης

w_t: λευκός θόρυβος, ασυσχέτιστος με x_t και $\boldsymbol{s}_t$

Δυναμικό σύστημα

$$\boldsymbol{s}_t = \boldsymbol{f}^t(\boldsymbol{s}_0) \xrightarrow{\text{θόρυβο}} \boldsymbol{s}_t = f^t(\boldsymbol{s}_0) + \varepsilon_t$$

δυναμικός θόρυβος

ε_t: λευκός θόρυβος, ασυσχέτιστος με $\boldsymbol{s}_u \quad u \le t$

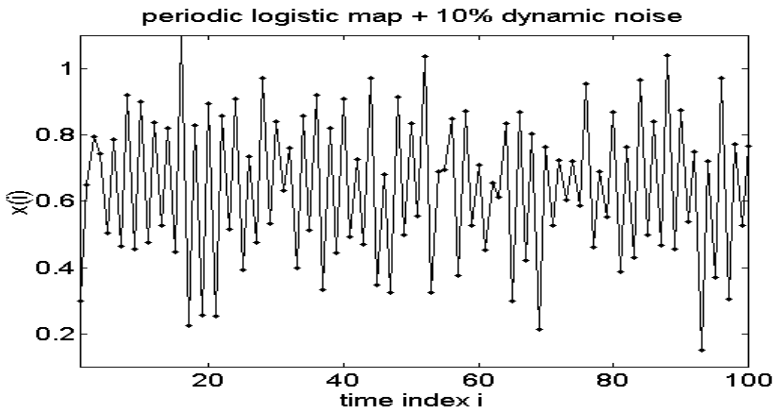
Θόρυβος: δυναμικός (συστήματος) ***ε*** παρατήρησης (μέτρησης) ***w***

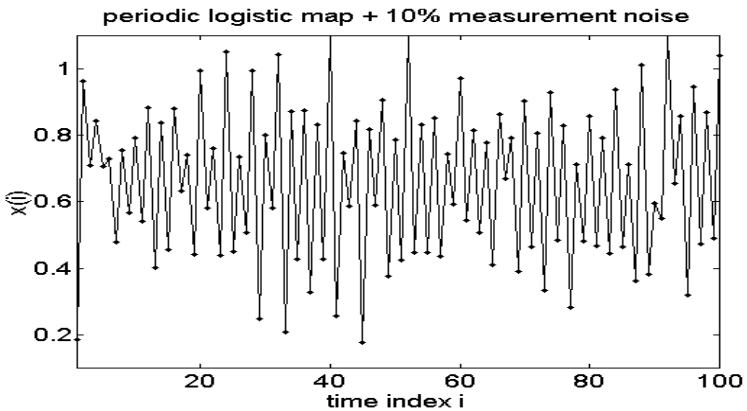
λογιστική απεικόνιση

$$s_i = a\, s_{i-1}(1 - s_{i-1}) + \varepsilon_i\ ,\ \varepsilon_i \sim N(0,s^2)$$
$$x_i = s_i$$

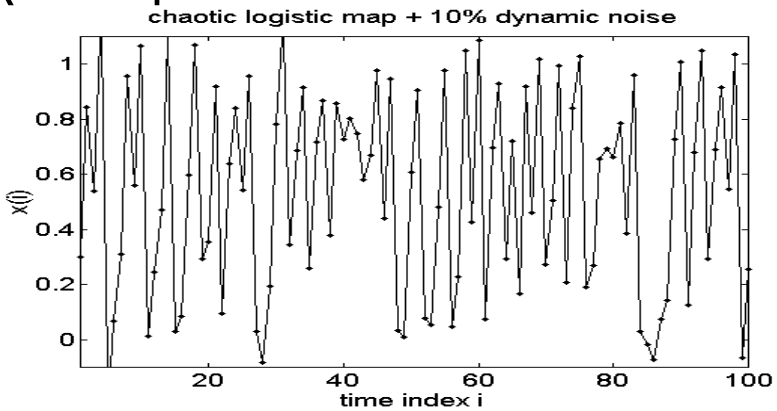
$$s_i = a\, s_{i-1}(1 - s_{i-1})$$
$$x_i = s_i + w_i, \quad w_i \sim N(0,s)$$

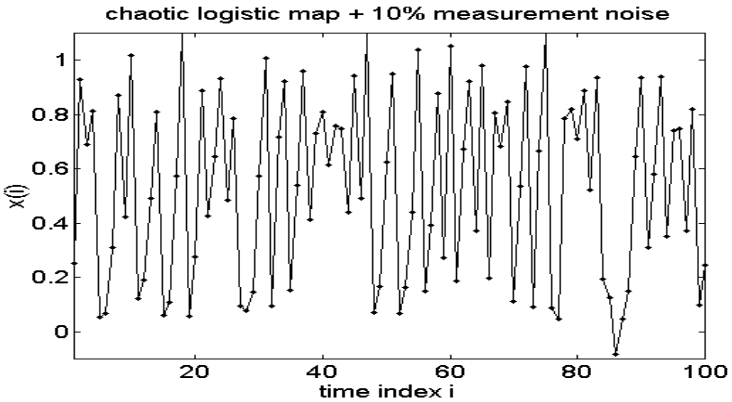
περιοδική





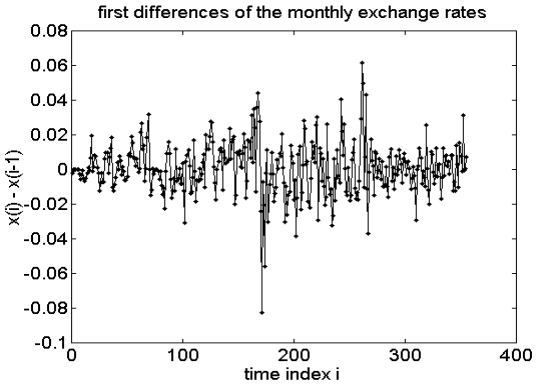
χαοτική

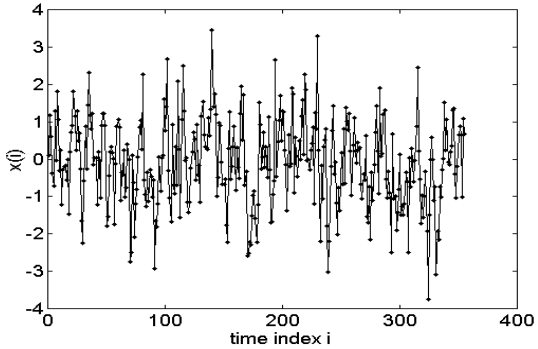


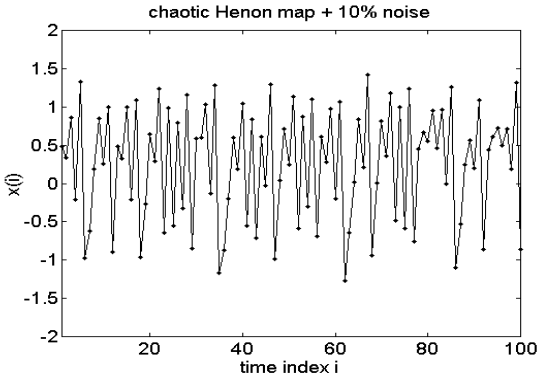


Διαγράμματα διασποράς σε 2 και 3 διαστάσεις

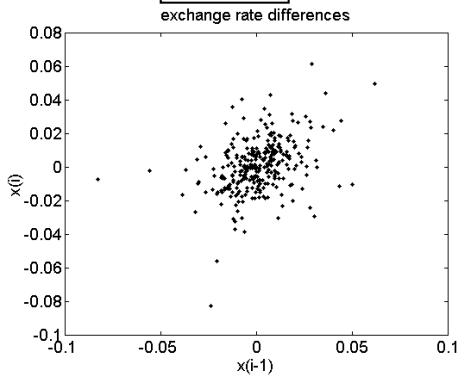
d=1

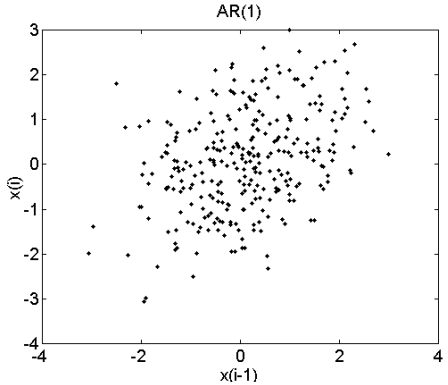


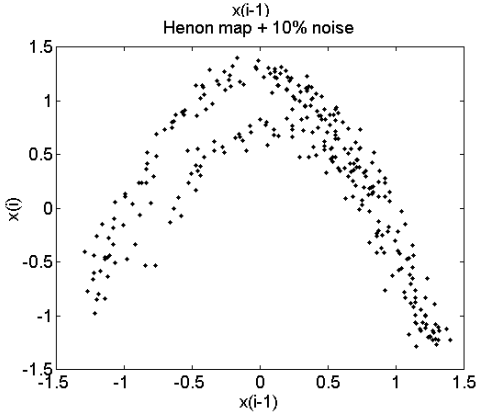




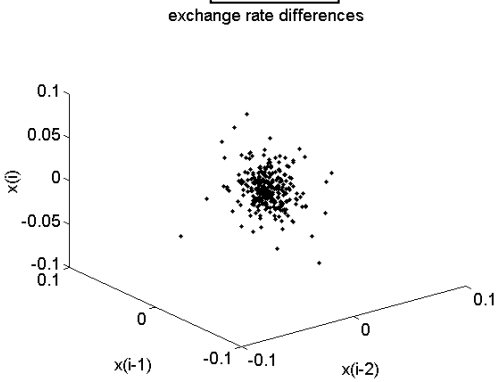
d=2

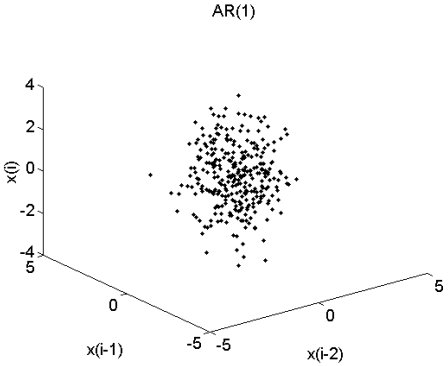


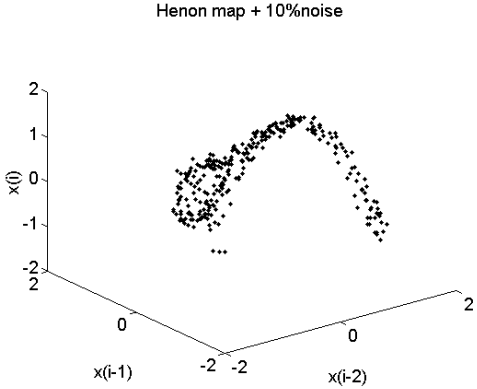




d=3

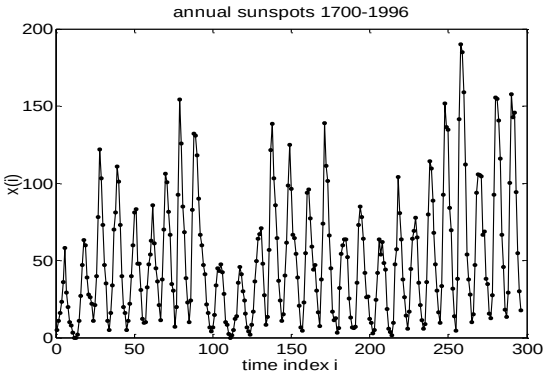


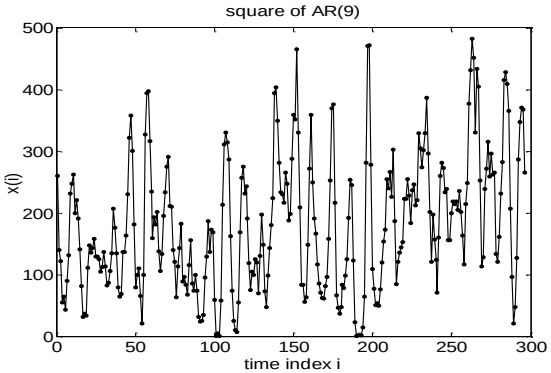


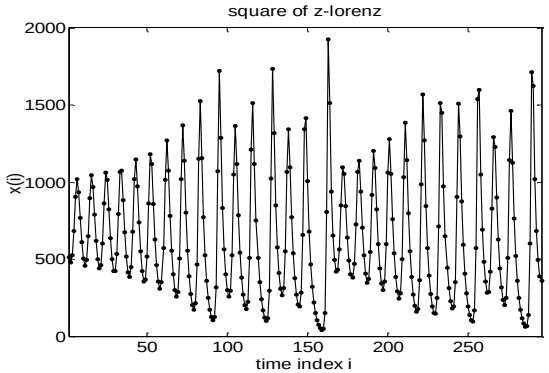


Διαγράμματα διασποράς σε 2 και 3 διαστάσεις

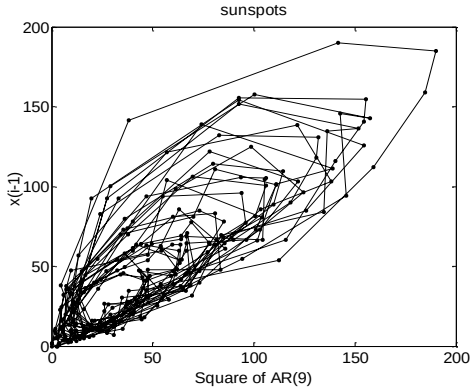
d=1

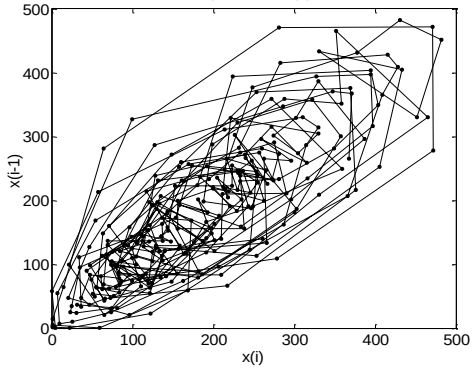


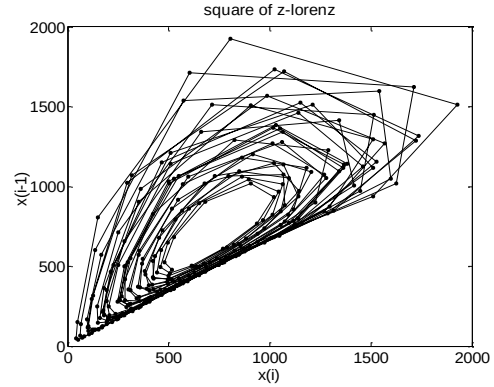
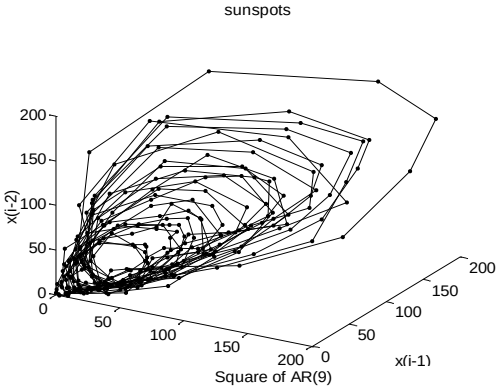
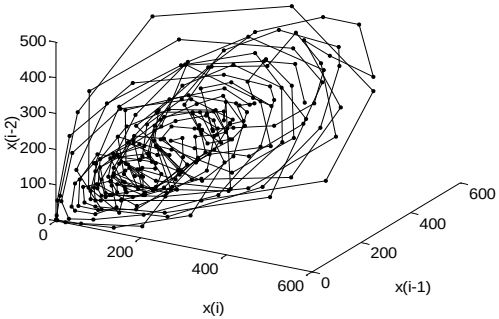
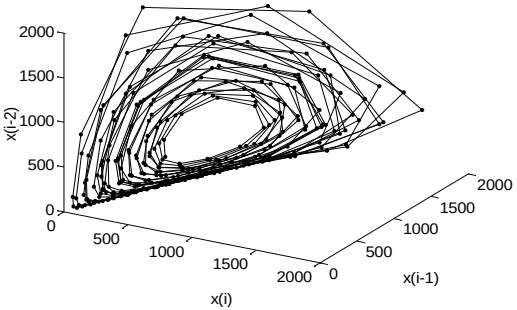




d=2







d=3