Χρονοσειρές Μάθημα 3

Ασυσχέτιστες (λευκός θόρυβος) και ανεξάρτητες (iid) παρατηρήσεις

Chatfield C., "The Analysis of Time Series, An Introduction", 6th edition, p. 38 (Chapter 3):
"Some authors prefer to make the weaker assumption that the z_t's are mutually **uncorrelated**, rather than **independent**. This is adequate for **linear**, normal processes, but the stronger independence assumption is needed when considering **non-linear** models (Chapter 11). Note that a purely random process is sometimes called white noise, particularly by engineers.
p. 221 (Chapter 11):
When examining the properties of non-linear models, it can be very important to distinguish between independent and uncorrelated random variables. In Section 3.4.1, **white noise** (or a purely random process) was defined to be a sequence of independent and identically distributed (**i.i.d.**) random variables. This is sometimes called strict white noise (SWN), and the phrase uncorrelated white noise (UWN) is used when successive values are merely uncorrelated, rather than independent. Of course if successive values follow a normal (Gaussian) distribution, then zero correlation implies independence so that Gaussian UWN is SWN. However, with non-linear models, distributions are generally non-normal and zero correlation need not imply independence.

Wei W.W.C., "Time Series Analysis, Univariate and Multivariate Methods", p. 15:
2.4 White Noise Processes
A process $\{a_t\}$ is called a **white noise** process if it is a sequence of uncorrelated random variables from a fixed distribution with constant mean (usually assumed 0), constant variance and zero autocovariance for lags different from 0.

Γραμμικές στάσιμες διαδικασίες

Γραμμική χρονοσειρά (στοχαστική διαδικασία)

$$X_t = \mu + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i Z_{t-i} \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2) \qquad \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i| < \infty$$

$\{X_t\}$ είναι **στάσιμη**

?

$$\mathrm{E}[X_t] = 0 \qquad \gamma_X(\tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i \psi_{i+\tau} \sigma_Z^2$$

Θεωρούμε μ=0

Θεωρώντας τον τελεστή υστέρησης:

$$X_t = \psi(B) Z_t \qquad \psi(B) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i B^i$$

Γραμμικό φίλτρο

$$Z_t \longrightarrow \boxed{\psi(B)} \longrightarrow X_t$$

Αν $\psi_i = 0$ για i<0 Γραμμική χρονοσειρά ως…

1 $$X_t = Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \cdots = Z_t + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i Z_{t-i}$$

κινούμενου μέσου MA(∞)
[moving average process]

2 $$X_t = \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \cdots + Z_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i X_{t-i} + Z_t$$

αυτοπαλινδρόμησης AR(∞)
[autoregressive process]

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\pi_i| < \infty \longrightarrow \{X_t\} \text{ είναι } \textbf{αντιστρέψιμη}$$

$$\pi(B) X_t = Z_t \Rightarrow X_t = \frac{1}{\pi(B)} Z_t \qquad \psi(B) = \frac{1}{\pi(B)}$$

το τυχαίο στοιχείο Z_t μπορεί να εκφρασθεί ως προς την παρούσα και τις προηγούμενες παρατηρήσεις X_t

Αυτοπαλινδρομούμενες διαδικασίες

2 $$X_t = \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \cdots + Z_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i X_{t-i} + Z_t$$ αυτοπαλινδρόμηση AR(∞)

Περιορίζουμε την αυτοπαλινδρόμηση στους p πιο πρόσφατους όρους

$$X_t = \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \cdots + Z_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης p, AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p) X_t = Z_t \qquad \phi(B) X_t = Z_t$$

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p \qquad \varphi(B) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i B^i$$ **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**

Συνθήκη στασιμότητας

Ρίζες του $\phi(\lambda) = 0$ να είναι έξω από το μοναδιαίο κύκλο

ή

Ρίζες του $\lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \ldots - \phi_{p-1} \lambda - \phi_p = 0$ να είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου

Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης 1, AR(1)

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

Συνθήκη στασιμότητας: $|\phi| < 1$

Διαδοχικές προς τα πίσω αντικαταστάσεις: $X_t = Z_t + \phi Z_{t-1} + \phi^2 Z_{t-2} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i Z_{t-i}$

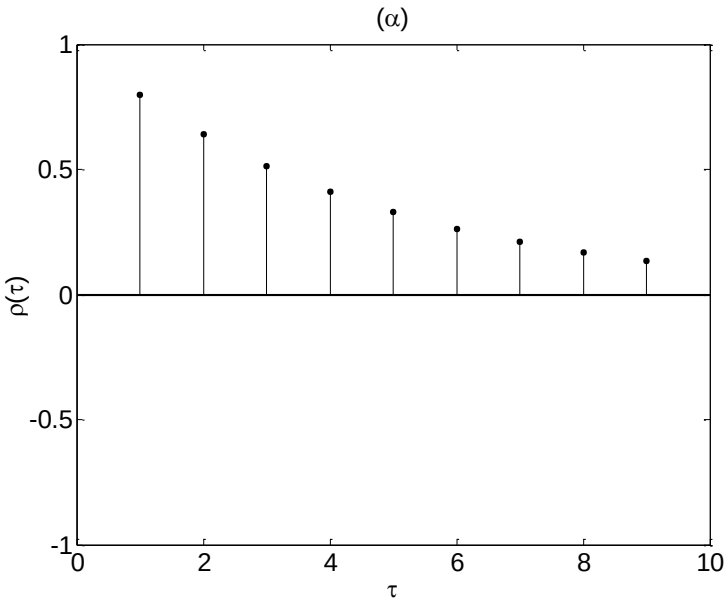
$$\mathrm{Var}[X_t] = \sigma_Z^2 (1 + \phi^2 + \phi^4 + \ldots) = \sigma_Z^2 \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i} \Rightarrow \sigma_X^2 = \frac{\sigma_Z^2}{1-\phi^2}$$

Αυτοσυσχέτιση? (υποθέτουμε στασιμότητα)

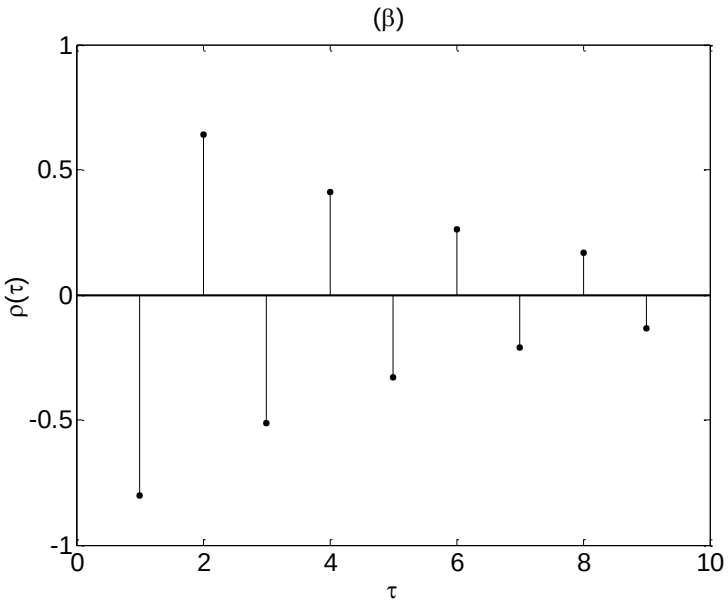
$$X_{t-1} X_t = X_{t-1}(\phi X_{t-1} + Z_t) \Rightarrow \mathrm{E}[X_{t-1} X_t] = \phi \mathrm{E}[X_{t-1} X_{t-1}] + \mathrm{E}[X_{t-1} Z_t] \Rightarrow \gamma_X(1) = \phi \sigma_X^2 \Rightarrow \rho_X(1) = \phi$$

$$X_{t-\tau} X_t = X_{t-\tau}(\phi X_{t-1} + Z_t) \Rightarrow \mathrm{E}[X_{t-\tau} X_t] = \phi \mathrm{E}[X_{t-\tau} X_{t-1}] + \mathrm{E}[X_{t-\tau} Z_t] \Rightarrow \gamma_X(\tau) = \phi \gamma_X(\tau - 1)$$

$$\Rightarrow \rho_X(\tau) = \phi^\tau$$



$\phi = 0.8$



$\phi = -0.8$

Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης 2, AR(2)

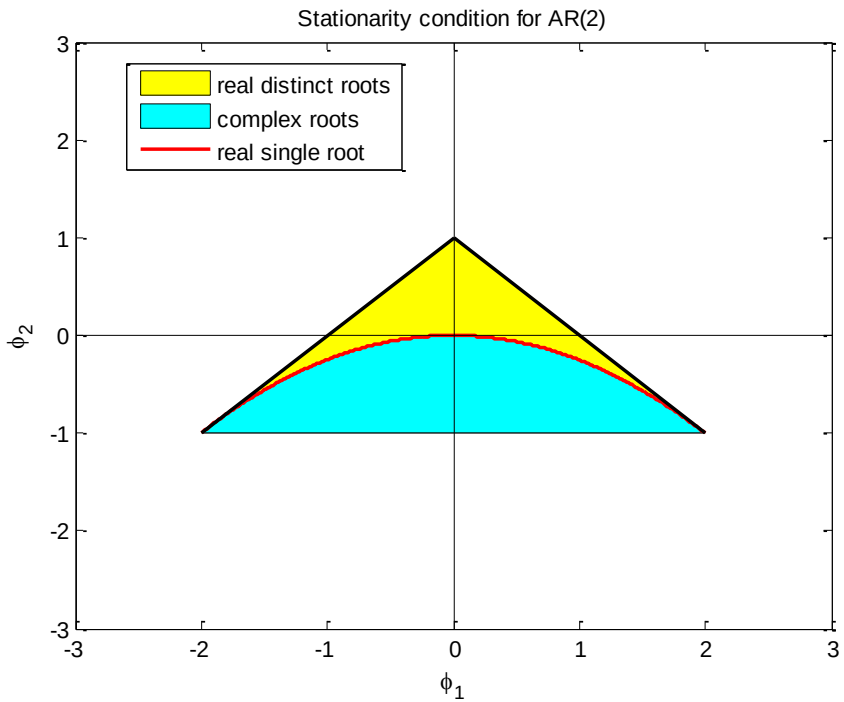
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

Συνθήκη στασιμότητας

Ρίζες του $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$ να είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου

ή εναλλακτικά οι ρίζες του $\lambda^2 - \phi_1 \lambda - \phi_2 = 0$ να είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου

Ρίζες: $B_{1,2} = \dfrac{-\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$ $\qquad |B_{1,2}| > 1 \Rightarrow \begin{cases} \phi_2 + \phi_1 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \\ -1 < \phi_2 < 1 \end{cases}$ **?**



δύο πραγματικές ρίζες:

$$\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$$

μία διπλή πραγματική ρίζα:

$$\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0$$

συζυγείς μιγαδικές ρίζες:

$$\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$$

6 **Συζυγείς μιγαδικές ρίζες σε AR(2) ορίζουν ψευδο-περιοδικότητα στην αυτοσυσχέτιση**

Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης 2, AR(2)

Αυτοσυσχέτιση? (υποθέτουμε στασιμότητα)

$$X_{t-1}X_t = X_{t-1}\left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t\right) \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}[X_{t-1}X_t] = \phi_1 \mathrm{E}[X_{t-1}X_{t-1}] + \phi_2 \mathrm{E}[X_{t-1}X_{t-2}] + \mathrm{E}[X_{t-1}Z_t] \Rightarrow$$

$$\gamma_X(1) = \phi_1 \sigma_X^2 + \phi_2 \gamma_X(1) \Rightarrow \rho_X(1) = \phi_1 + \phi_2 \rho_X(1)$$

$$X_{t-2}X_t = X_{t-2}\left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t\right) \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}[X_{t-2}X_t] = \phi_1 \mathrm{E}[X_{t-2}X_{t-1}] + \phi_2 \mathrm{E}[X_{t-2}X_{t-1}] + \mathrm{E}[X_{t-2}Z_t] \Rightarrow$$

$$\gamma_X(2) = \phi_1 \gamma_X(1) + \phi_2 \sigma_X^2 \Rightarrow \rho_X(2) = \phi_1 \rho_X(1) + \phi_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \end{aligned}}$$

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \qquad \phi_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}$$

$$\rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} \qquad \phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

Για υστέρηση τ:

$$\gamma_X(\tau) = \phi_1 \gamma_X(\tau-1) + \phi_2 \gamma_X(\tau-2) \Rightarrow$$

$$\rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \phi_2 \rho_{\tau-2} \qquad (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)\rho_\tau = 0$$

ρ_τ μπορεί να υπολογιστεί επαναληπτικά

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

πραγματικές ρίζες: εκθετική πτώση

μιγαδικές ρίζες: φθίνουσα ημιτονοειδή συνάρτηση

διασπορά

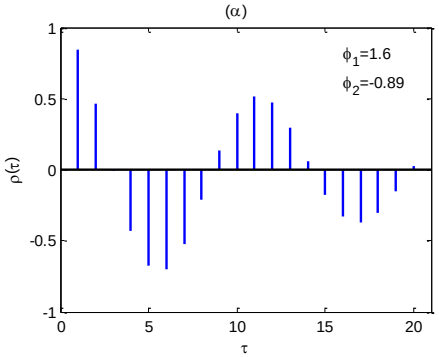
$$X_t X_t = X_t\left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t\right) \Rightarrow$$

$$\sigma_X^2 = \phi_1 \gamma_X(1) + \phi_2 \gamma_X(2) + \sigma_Z^2 \Rightarrow$$

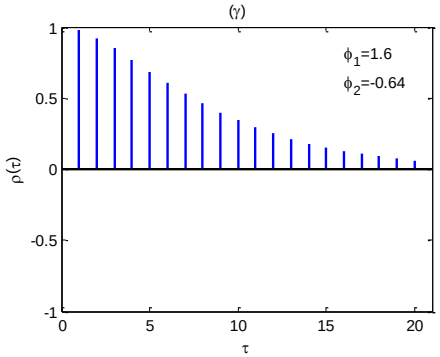
$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_Z^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2}$$

Αυτοσυσχέτιση

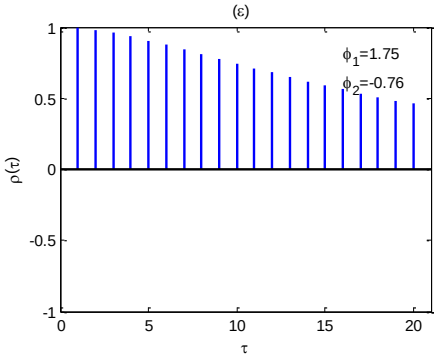
(α) λ_1=0.8+0.5i
λ_2=0.8-0.5i



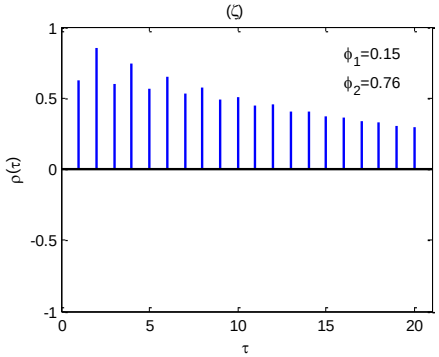
(γ) λ_1=0.8
λ_2=0.8



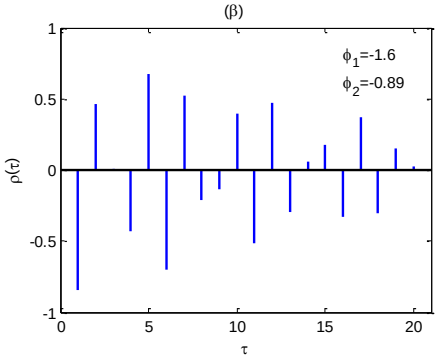
(ε) λ_1=0.8
λ_2=0.95



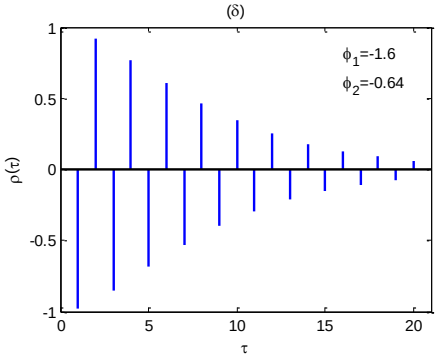
(ζ) λ_1=-0.8
λ_2=0.95



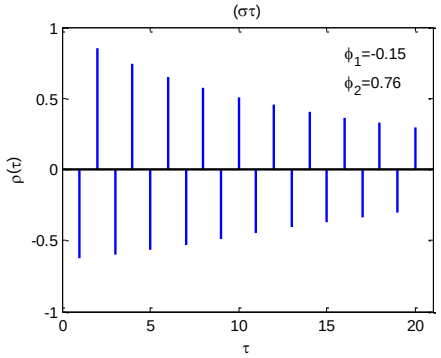
(β) λ_1=-0.8+0.5i
λ_2=-0.8-0.5i



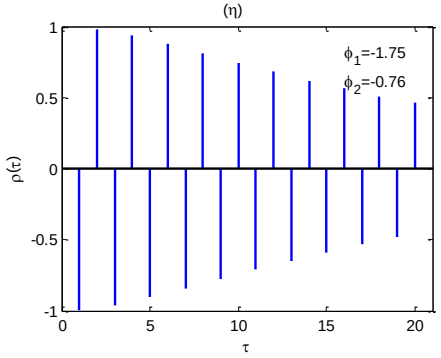
(δ) λ_1=-0.8
λ_2=-0.8



(στ) λ_1=0.8
λ_2=-0.95



(η) λ_1=-0.8
λ_2=-0.95



Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης p, AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p) X_t = Z_t$$

Συνθήκη στασιμότητας

Ρίζες του $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$ να είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου

Αυτοσυσχέτιση? (υποθέτουμε στασιμότητα)

Για υστέρηση τ:

$$X_{t-\tau} X_t = X_{t-\tau}\left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t\right) \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}[X_{t-\tau} X_t] = \phi_1 \mathrm{E}[X_{t-\tau} X_{t-1}] + \phi_2 \mathrm{E}[X_{t-\tau} X_{t-2}] + \cdots + \phi_p \mathrm{E}[X_{t-p} X_{t-2}] + \mathrm{E}[X_{t-p} Z_t] \Rightarrow$$

$$\gamma_X(\tau) = \phi_1 \gamma_X(\tau - 1) + \phi_2 \gamma_X(\tau - 2) + \cdots + \phi_p \gamma_X(\tau - p) \Rightarrow$$

$$\rho_X(\tau) = \phi_1 \rho_X(\tau - 1) + \phi_2 \rho_X(\tau - 2) + \cdots + \phi_p \rho_X(\tau - p) \Rightarrow \phi(B)\rho_\tau = 0$$

πραγματικές ρίζες: εκθετική πτώση

μιγαδικές ρίζες: φθίνουσα ημιτονοειδή συνάρτηση

7 **Συνθήκες στασιμότητας για τους συντελεστές φ_1, φ_2, φ_3, της διαδικασίας AR(3)**

Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης p, AR(p)

$$\rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \phi_2 \rho_{\tau-2} + \cdots + \phi_p \rho_{\tau-p} \qquad \rho_\tau = \rho_{-\tau}$$

$$\begin{array}{l} \tau = 1 \\ \tau = 2 \\ \cdots \\ \tau = p \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{lllll} \rho_1 = & \phi_1 & +\phi_2 \rho_1 & +\cdots & +\phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 = & \phi_1 \rho_1 & +\phi_2 & +\cdots & +\phi_p \rho_{p-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_p = & \phi_1 \rho_{p-1} & +\phi_2 \rho_{p-2} & +\cdots & +\phi_p \end{array}}$$

Εξισώσεις Yule-Walker

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\rho}_p = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_p = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_p \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\rho}_p$$

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{P}_p^{-1} \boldsymbol{\rho}_p$$

Διασπορά

$$X_t X_t = X_t \left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t \right) \Rightarrow$$

$$\sigma_X^2 = \phi_1 \gamma_X(1) + \phi_2 \gamma_X(2) + \cdots + \phi_p \gamma_X(p) + \sigma_Z^2 \Rightarrow \quad \sigma_X^2 = \frac{\sigma_Z^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 - \cdots - \phi_p \rho_p}$$

Μερική αυτοσυσχέτιση

Εξισώσεις Yule-Walker

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

Για κάθε k υπολογίζουμε τον συντελεστή $\phi_k \to \phi_{kk}$

$k=1 \qquad \phi_{11} = \rho_1$

$$k=2 \qquad \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

$$k=3 \qquad \phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$\cdots \qquad \cdots$

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

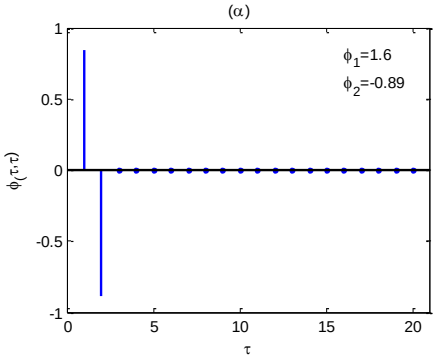
μερική αυτοσυσχέτιση για υστέρηση (τάξη) k

Επαναληπτικός αλγόριθμος των Durbin-Levinson

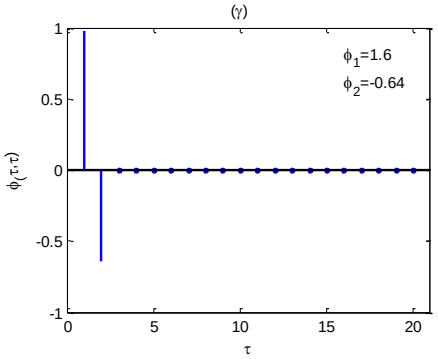
οι συντελεστές του AR(p) $\phi_{p1}, \phi_{p2}, \ldots, \phi_{pp}$, υπολογίζονται επαναληπτικά, όπου για κάθε τάξη k οι συντελεστές υπολογίζονται από τους συντελεστές τάξης k-1

Μερική αυτοσυσχέτιση

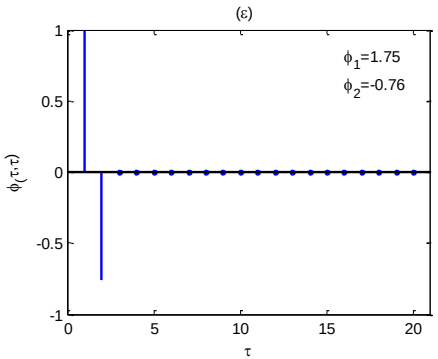
(α) λ_1=0.8+0.5i
λ_2=0.8-0.5i



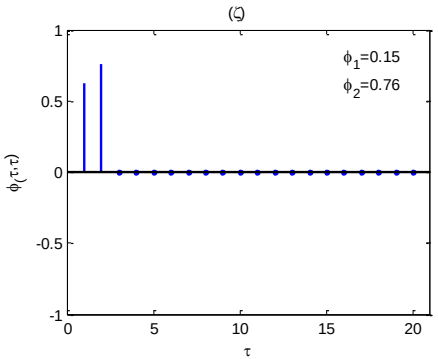
(γ) λ_1=0.8
λ_2=0.8



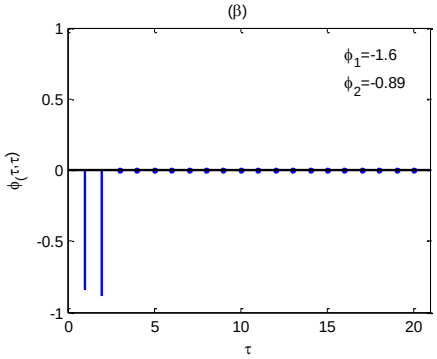
(ε) λ_1=0.8
λ_2=0.95



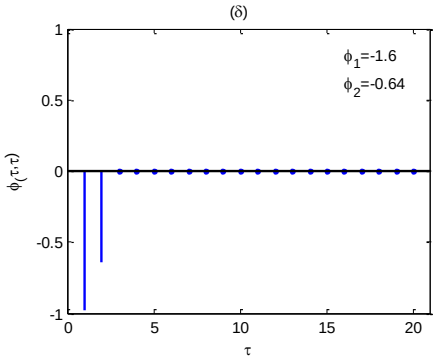
(ζ) λ_1=-0.8
λ_2=0.95



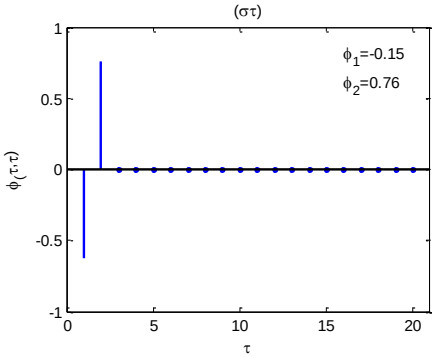
(β) λ_1=-0.8+0.5i
λ_2=-0.8-0.5i



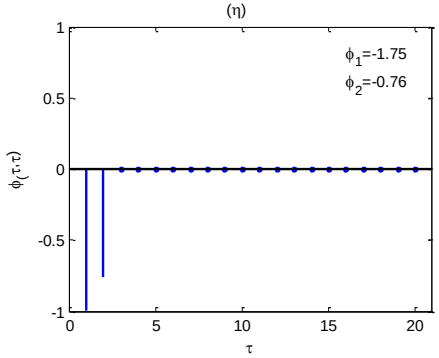
(δ) λ_1=-0.8
λ_2=-0.8



(στ) λ_1=0.8
λ_2=-0.95



(η) λ_1=-0.8
λ_2=-0.95



8 **Μαρκοβιανές διαδικασίες, ιδιότητες, διαφορές και ομοιότητες με AR διαδικασίες**

9 **Εκτίμηση τάξης Μαρκοβιανής διαδικασίας, διαφορές και ομοιότητες με εκτίμησης τάξης AR διαδικασίας**

Διαδικασίες κινούμενου μέσου

1 $$X_t = Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \cdots = Z_t + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i Z_{t-i}$$ κινούμενου μέσου MA(∞)

Περιορίζουμε του όρους του λευκού θορύβου στους q πιο πρόσφατους όρους

$$X_t = Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \cdots \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης q, MA(q)

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q} \qquad \psi_i = -\theta_i$$

$$X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q) Z_t \qquad X_t = \theta(B) Z_t \qquad \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

MA(q) είναι στάσιμη **?**

MA(q) είναι αντιστρέψιμη αν $Z_t = \theta^{-1}(B) X_t$

Συνθήκη αντιστρεψιμότητας

Ρίζες του $\theta(\lambda) = 0$ να είναι έξω από το μοναδιαίο κύκλο

Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης 1, MA(1)

$X_t = Z_t - \theta Z_{t-1} \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$ **Συνθήκη αντιστρεψιμότητας:** $|\theta| < 1$

$$X_t X_t = (Z_t - \theta Z_{t-1})(Z_t - \theta Z_{t-1}) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \sigma_X^2 = (1+\theta^2)\sigma_Z^2$$

?

$$X_{t-1} X_t = (Z_{t-1} - \theta Z_{t-2})(Z_t - \theta Z_{t-1}) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \gamma_X(1) = \theta \sigma_Z^2 \Rightarrow \rho_1 = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

$$X_{t-2} X_t = (Z_{t-2} - \theta Z_{t-3})(Z_t - \theta Z_{t-1}) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \gamma_X(2) = 0$$

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta}{1+\theta^2} & \tau = 1 \\ 0 & \tau \geq 2 \end{cases}$$

$|\rho_1| \leq 1/2$

?

Για κάποιο ρ_1 υπάρχουν δύο λύσεις για θ και μόνο η μία θα πληρεί τη συνθήκη αντιστρεψιμότητας

$X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}$ και $X_t = Z_t - 1/\theta Z_{t-1}$

έχουν την ίδια αυτοσυσχέτιση

Παράδειγμα

$X_t = Z_t - 0.4 Z_{t-1}$

$X_t = Z_t - 2.5 Z_{t-1}$

$$\rho_\tau = \begin{cases} -\dfrac{1}{2.9} & \tau = 1 \\ 0 & \tau \geq 2 \end{cases}$$

Αν η ρίζα του $1 - \theta B = 0$ είναι έξω από το μοναδιαίο κύκλο ➔ η ρίζα του $1 - 1/\theta B = 0$ είναι μέσα στο μοναδιαίο κύκλο

Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης 1, MA(1)

Μερική αυτοσυσχέτιση

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

$$\phi_{2,2} = \frac{-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} = -\frac{\theta^2}{1+\theta^2+\theta^4}$$

$$\phi_{3,3} = \frac{\rho_1^3}{1-2\rho_1^2} = -\frac{\theta^3}{1+\theta^2+\theta^4+\theta^6}$$

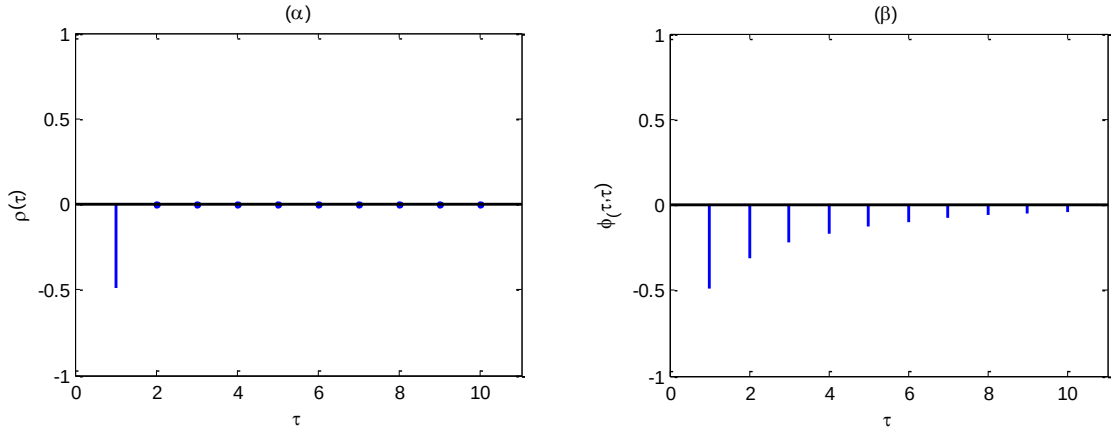
$$\boxed{\phi_{\tau,\tau} = -\frac{\theta^\tau(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(\tau+1)}}, \qquad \tau \geq 1}$$

- $\phi_{\tau\tau}$ του MA(1) φθίνει όπως ρ_τ του AR(1)

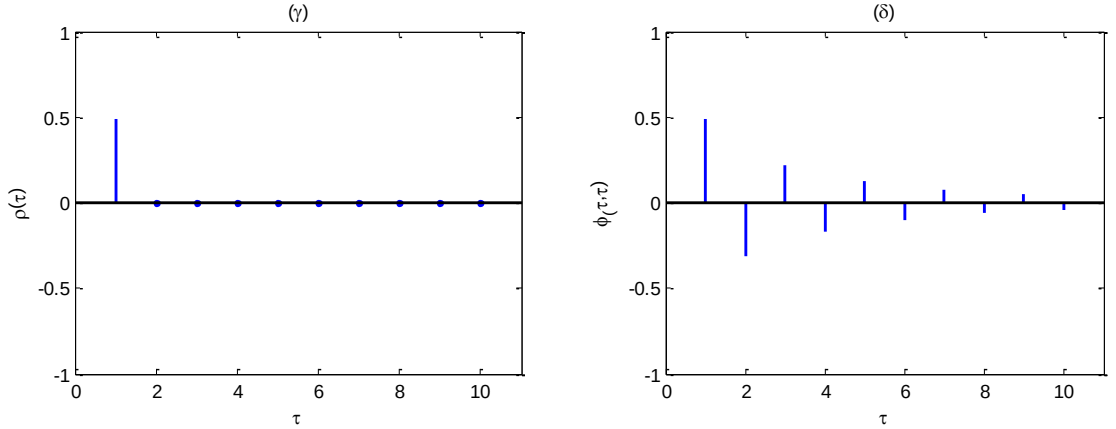
- ρ_τ του MA(1) φθίνει όπως $\phi_{\tau\tau}$ του AR(1)

- … αλλά για MA(1), ρ_τ και $\phi_{\tau\tau}$ είναι πάντα ≤0.5

$\theta = 0.8$



$\theta = -0.8$



Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης 2, MA(2)

$$X_t = \theta(B)Z_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2}, \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο

MA(2) είναι πάντα στάσιμη

MA(2) είναι αντιστρέψιμη αν οι ρίζες του $\theta(B)$ είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου

Διασπορά $\sigma_X^2 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_Z^2$

Αυτοσυσχέτιση

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & \tau = 1 \\ \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & \tau = 2 \\ 0 & \tau > 2 \end{cases}$$

Μερική αυτοσυσχέτιση

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{2,2} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\phi_{3,3} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2-\rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1-\rho_2)}$$

$\phi_{\tau,\tau} = \ldots$ πολύπλοκη έκφραση

10 **Συνθήκες αντιστρεψιμότητας για τους συντελεστές θ_1, θ_2, καθώς και για τις αυτοσυσχετίσεις ρ_1, ρ_2, της διαδικασίας MA(2)**

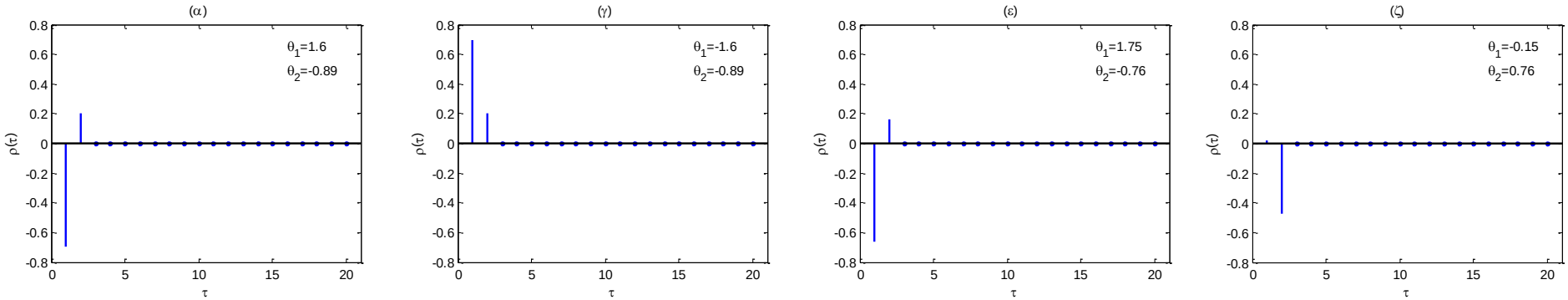
λ_1=0.8+0.5i
λ_2=0.8-0.5i

λ_1=-0.8+0.5i
λ_2=-0.8-0.5i

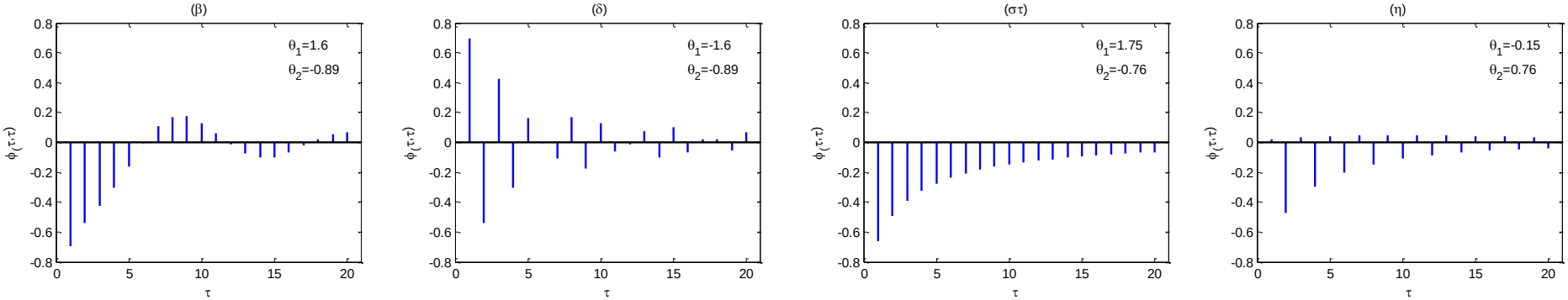
λ_1=0.8
λ_2=0.95

λ_1=0.8
λ_2=-0.95

Αυτοσυσχέτιση



Μερική αυτοσυσχέτιση



- $\phi_{\tau\tau}$ του MA(2) φθίνει όπως ρ_τ του AR(2)

- ρ_τ του MA(2) φθίνει όπως $\phi_{\tau\tau}$ του AR(2)

- … αλλά για MA(2), ρ_τ και $\phi_{\tau\tau}$ είναι πάντα ≤0.5

Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης q, MA(q)

$$X_t = \theta(B)Z_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q} \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Διασπορά $\sigma_X^2 = (1 + \theta_1^2 + \cdots \theta_q^2)\sigma_Z^2$

Αυτοδιασπορά

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \sigma_Z^2(-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \cdots + \theta_{q-\tau}\theta_q) & \tau = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & \tau > q \end{cases}$$

Αυτοσυσχέτιση

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \cdots + \theta_{q-\tau}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2} & \tau = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & \tau > q \end{cases}$$

Η μερική αυτοσυσχέτιση φθίνει με μορφή που καθορίζεται από τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

Οι εκφράσεις των $\phi_{\tau\tau}$ ως προς τους συντελεστές θ_1, θ_2, ..., θ_q είναι πολύπλοκες