Κεφάλαιο 2

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Οι στατιστικές δείγματος, όπως η δειγματική μέση τιμή $\bar{x}$ και η δειγματική διασπορά s^2, που θα δούμε παρακάτω, υπολογίζονται από τα στατιστικά δεδομένα που έχουμε συλλέξει και χρησιμοποιούνται για την *εκτίμηση* των σχετικών παραμέτρων πληθυσμού (μ και σ^2 αντίστοιχα).

Τα στατιστικά δεδομένα πρέπει να προέρχονται από *τυχαίο* κι *αντιπροσωπευτικό* δείγμα του πληθυσμού. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να μελετήσουμε το όριο της έντασης ηλεκτρικού ρεύματος που καίγονται ασφάλειες 40 αμπέρ θα πρέπει να διαλέξουμε στην τύχη ασφάλειες του ίδιου τύπου και να μετρήσουμε σε ποια ένταση του ρεύματος καίγεται η κάθε μια από αυτές.

Από τις μετρήσεις του δείγματος μπορούμε να υπολογίσουμε τη **σημειακή εκτίμηση** (point estimation) και την **εκτίμηση διαστήματος** (interval estimation) της παραμέτρου μιας τ.μ..

2.1 Σημειακή Εκτίμηση

Η *σημειακή εκτίμηση* είναι μια τιμή, που υπολογίζεται με βάση τα δεδομένα και αντιπροσωπεύει την πραγματική τιμή της σχετικής παραμέτρου του πληθυσμού. Για παράδειγμα, ο μέσος όρος των 25 τιμών τάσης διάσπασης που μετρήθηκαν σε δείγμα 25 ηλεκτρικών κυκλωμάτων αποτελεί μια σημειακή εκτίμηση της μέσης τάσης διάσπασης κυκλώματος.

Έστω X μια τ.μ. με συνάρτηση κατανομής $F_X(x;\theta)$ που εξαρτάται από την παράμετρο θ την οποία θέλουμε να εκτιμήσουμε. Έστω ακόμα ότι έχουμε ανεξάρτητες μεταξύ τους παρατηρήσεις $\{x_1,\ldots,x_n\}$ της X από ένα δείγμα μεγέθους n. Τότε η σημειακή εκτίμηση της θ δίνεται από τη συνάρτηση $g(x_1,\ldots,x_n)$ των τιμών του δείγματος που λέγεται **εκτιμήτρια συνάρτηση**. Η **εκτιμήτρια** (estimator) της θ από το δείγμα είναι $\hat{\theta} = g(x_1,\ldots,x_n)$.

Επειδή οι παρατηρήσεις $\{x_1,\ldots,x_n\}$ αλλάζουν κάθε φορά που μελετάμε διαφορετικό δείγμα μεγέθους n, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι παρατηρήσεις $\{x_1,\ldots,x_n\}$ είναι τιμές των τ.μ. $\{X_1,\ldots,X_n\}$, που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους κι ακολουθούν την ίδια κατανομή $F(x;\theta)$. Η παράμετρος $\hat{\theta}$ είναι συνάρτηση αυτών των τ.μ.. Για ευκολία θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\{x_1,\ldots,x_n\}$ και θεωρητικά (εννοώντας τις τ.μ. $\{X_1,\ldots,X_n\}$) και πρακτικά (εννοώντας τις παρατηρούμενες αριθμητικές τιμές αυτών των τ.μ.). Θα αναφερόμαστε στις $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ως **τυχαίο δείγμα**.

Είναι φανερό ότι για διαφορετικά τυχαία δείγματα η εκτιμήτρια συνάρτηση της παραμέτρου $\hat{\theta}$ παίρνει διαφορετικές τιμές, δηλαδή η $\hat{\theta}$ είναι η ίδια τ.μ. με κάποια κατανομή κι έχει μέση τιμή $\mu_{\hat{\theta}} \equiv \mathrm{E}(\hat{\theta})$ και διασπορά $\sigma^2_{\hat{\theta}} \equiv \mathrm{Var}(\hat{\theta})$.

Δύο σημαντικές παράμετροι μιας τ.μ. X που θέλουμε να εκτιμήσουμε είναι η μέση τιμή μ κι η διασπορά σ^2.

Εκτίμηση μέσης τιμής Είναι φυσικό σαν εκτιμήτρια της μ να ορίσουμε τον αριθμητικό μέσο όρο των n παρατηρήσεων, που λέγεται και **δειγματική μέση τιμή**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{2.1}$$

Εκτίμηση διασποράς Όπως για τη μέση τιμή έτσι και για τη διασπορά σ^2 η εκτιμήτρια είναι η δειγματική διασπορά που ορίζεται με δύο τρόπους, έχουμε δηλαδή τις δύο εκτιμήτριες της σ^2

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \tag{2.2}$$

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \tag{2.3}$$

Οι εκτιμήτριες s^2 και $\tilde{s}^2$ διαφέρουν μόνο ως προς το συντελεστή του αθροίσματος ($\frac{1}{n-1}$ και $\frac{1}{n}$ αντίστοιχα). Για μεγάλο n οι δύο εκτιμήτριες συγκλίνουν στην ίδια τιμή. Αναπτύσσοντας τα τετράγωνα της (2.2) έχουμε

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2\right)$$

και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της $\bar{x}$ από την (2.1) παίρνουμε τον ισοδύναμο τύπο (όμοια για τη (2.3))

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right). \tag{2.4}$$

Ο τύπος (2.4) είναι πιο εύχρηστος για τον υπολογισμό της s^2.

2.1.1 Κριτήρια καλών εκτιμητριών

Παραπάνω ορίσαμε κάπως αυθαίρετα εκτιμήτριες της μέσης τιμής μ και της διασποράς σ^2 χωρίς να γνωρίζουμε αν είναι 'καλές' εκτιμήτριες ή όχι. Γενικά όταν ορίζουμε μια εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ κάποιας παραμέτρου θ θέλουμε να ελέγξουμε αν είναι κατάλληλη και γι αυτό θέτουμε κάποια κριτήρια ή ιδιότητες που πρέπει να πληρεί μια 'καλή' εκτιμήτρια. Παρακάτω περιγράφονται ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες μιας εκτιμήτριας $\hat{\theta}$.

Αμεροληψία Η $\hat{\theta}$ είναι αμερόληπτη (unbiased) αν η μέση τιμή της είναι ίση με την παράμετρο θ, δηλαδή $\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \theta$. Αλλιώς λέγεται μεροληπτική με μεροληψία $b(\hat{\theta}) = \mathrm{E}(\hat{\theta}) - \theta$.

Αμεροληψία μέσης τιμής

Η δειγματική μέση τιμή $\bar{x}$ που ορίστηκε στη (2.1) είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής μ μιας τ.μ. X ενός πληθυσμού.

Έχουμε $\theta \to \mu$ και $\hat{\theta} \to \bar{x}$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathrm{E}(\bar{x}) = \mu$.

$$\mathrm{E}(\bar{x}) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu.$$

<u>Αμεροληψία διασποράς</u>

Για την εκτίμηση της διασποράς σ^2 μιας τ.μ. X του πληθυσμού ισχύουν οι παρακάτω δύο προτάσεις:

1. Η δειγματική διασπορά s^2 που ορίστηκε στη (2.2) είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της σ^2, $\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2$.

2. Η δειγματική διασπορά $\tilde{s}^2$ που ορίστηκε στη (2.3) είναι μεροληπτική εκτιμήτρια της σ^2 με μεροληψία $b(\tilde{s}^2) = -\frac{\sigma^2}{n}$.

Αποδεικνύουμε πρώτα την πρόταση (1). Υπενθυμίζουμε ότι για μια τ.μ. X με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 ισχύουν

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 \qquad \text{και} \qquad \mathrm{E}(X^2) = \sigma^2 + \mu^2. \tag{2.5}$$

Επίσης επειδή οι $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι ανεξάρτητες κι έχουν την ίδια διασπορά σ^2 με τη X ισχύει

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(x_i) = n\sigma^2$$

και άρα η διασπορά της δειγματικής μέσης τιμής $\bar{x}$ είναι

$$\sigma_{\bar{x}}^2 \equiv \mathrm{Var}(\bar{x}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{2.6}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα για τη διασπορά καθώς κι ότι $\mu_{\bar{x}} \equiv \mathrm{E}(\bar{x}) = \mu$ έχουμε από την (2.5)

$$\mathrm{E}(\bar{x}^2) = \sigma_{\bar{x}}^2 + \mu_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη μέση τιμή της s^2 που δίνεται από την (2.4):

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(s^2) &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(x_i^2) - n\mathrm{E}(\bar{x}^2)\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2) = \sigma^2
\end{aligned}$$

κι αποδεικνύεται η αμεροληψία της εκτιμήτριας s^2.

Για την πρόταση (2), από παραπάνω προκύπτει (διαιρώντας με n αντί του $n-1$) ότι $\mathrm{E}(\tilde{s}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ κι άρα η αμεροληψία είναι

$$b(\tilde{s}^2) = \mathrm{E}(\tilde{s}^2) - \sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}.$$

Συνέπεια Η ιδιότητα αυτή ορίζει πως όσο αυξάνει το μέγεθος n του δείγματος τόσο μεγαλώνει η πιθανότητα η εκτίμηση να είναι 'κοντά' στην πραγματική τιμή της παραμέτρου, όπου το 'κοντά' δίνεται από κάποια απόσταση ϵ. Δηλαδή η $\hat{\theta}$ είναι συνεπής (consistent) αν

$$\mathrm{P}(|\theta - \hat{\theta}| \leq \epsilon) \to 1 \quad \text{όταν} \quad n \to \infty,$$

όπου ϵ είναι αυθαίρετα μικρός θετικός αριθμός. Όταν μια εκτιμήτρια είναι συνεπής τότε με την αύξηση του δείγματος οι τιμές της θα συγκλίνουν στην πραγματική τιμή της παραμέτρου.

Η εκτιμήτρια $\bar{x}$ της μέσης τιμής μ μιας τ.μ. X είναι συνεπής. Αν όμως αντί της δειγματικής μέσης τιμής διαλέξουμε σαν εκτιμήτρια της μ τον αριθμητικό μέσο της μικρότερης και μεγαλύτερης τιμής του δείγματος

$$x_d = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2},$$

τότε μπορεί να δειχθεί ότι η εκτιμήτρια x_d δεν είναι συνεπής εκτιμήτρια της μ.

Αποτελεσματικότητα Η αποτελεσματικότητα αναφέρεται στη διασπορά της εκτιμήτριας και δίνεται συγκριτικά. Μια εκτιμήτρια $\hat{\theta}_1$ της θ είναι πιο αποτελεσματική (effective) από μια άλλη εκτιμήτρια $\hat{\theta}_2$ αν έχει μικρότερη διασπορά, $\sigma^2_{\hat{\theta}_1} < \sigma^2_{\hat{\theta}_2}$.

Για παράδειγμα, η δειγματική μέση τιμή $\bar{x}$ και η x_d είναι δύο εκτιμήτριες της μέσης τιμής μ κι έχουν διασπορές $\sigma^2_{\bar{x}}$ και $\sigma^2_{x_d}$ αντίστοιχα. Μπορεί να δειχθεί ότι $\sigma^2_{\bar{x}} < \sigma^2_{x_d}$ κι άρα η εκτιμήτρια $\bar{x}$ είναι πιό αποτελεσματική από τη x_d.

Επάρκεια Μια εκτιμήτρια της παραμέτρου θ είναι επαρκής (adequate) όταν χρησιμοποιεί όλη την πληροφορία από το δείγμα που σχετίζεται με τη θ.

Η δειγματική μέση τιμή $\bar{x}$, εκτιμήτρια της μέσης τιμής μ μιας τ.μ. X, είναι επαρκής γιατί χρησιμοποιεί όλες τις παρατηρήσεις που μετρήθηκαν στο δείγμα, ενώ η x_d δεν είναι επαρκής γιατί χρησιμοποιεί μόνο δύο τιμές των παρατηρήσεων του δείγματος ($x_{\min}$ και $x_{\max}$).

Παρατηρήσεις

Οι εκτιμήτριες $\bar{x}$ για την παράμετρο μ και s^2 για την παράμετρο σ^2, που ορίσαμε αυθαίρετα, πληρούν όλες τις τέσσερις ιδιότητες και είναι καλές εκτιμήτριες.

Όταν θέλουμε να βρούμε εκτιμήτρια για μια παράμετρο, μας ενδιαφέρει κυρίως να είναι αμερόληπτη και να έχει μικρή διασπορά για να εξασφαλίσουμε ότι οι τιμές της εκτιμήτριας συγκεντρώνονται στην πραγματική τιμή της παραμέτρου. Γι αυτό ορίζουμε την **αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς** (minimum variance ubiased estimator), δηλαδή αυτή που απ' όλες τις αμερόληπτες εκτιμήτριες έχει την μικρότερη διασπορά.

Στον ορισμό των εκτιμητριών $\bar{x}$ και s^2 δεν κάναμε κάποια υπόθεση για την κατανομή της τ.μ. X κι άρα μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για οποιαδήποτε τ.μ. X που παρατηρούμε.

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε πως η κατανομή της X είναι γνωστή (ως προς τη γενική μορφή της) αλλά δεν είναι γνωστή κάποια παράμετρο θ της κατανομής και θα δούμε πως μπορούμε γενικά να υπολογίσουμε την εκτιμήτρια της θ.

2.1.2 Μέθοδος υπολογισμού της σημειακής εκτίμησης

Υποθέτουμε ότι η τ.μ. X έχει κάποια γνωστή κατανομή, δηλαδή γνωρίζουμε τη γενική μορφή της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής $F(x;\theta)$ και της $f(x;\theta)$, που είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αν η X είναι συνεχής και η συνάρτηση μάζας πιθανότητας αν η X είναι διακριτή. Η παράμετρος θ της κατανομής είναι άγνωστη και θέλουμε να την εκτιμήσουμε από το τυχαίο δείγμα $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Θα θεωρήσουμε επίσης τη γενική περίπτωση να έχουμε περισσότερες από μία άγνωστες παραμέτρους.

Μέθοδος των Ροπών Για συνήθεις κατανομές, μια παράμετρος θ της κατανομής $F(x;\theta)$ σχετίζεται με τις δύο κύριες παραμέτρους μ και σ^2. Για παράδειγμα, για την κανονική κατανομή η μέση τιμή μ και η διασπορά σ^2 αποτελούν και τις (μοναδικές) παραμέτρους της. Για την ομοιόμορφη κατανομή σε διάστημα $[a,b]$, η σχέση των παραμέτρων της κατανομής a και b με τη μέση τιμή μ και τη διασπορά σ^2 δίνεται ως $\mu = \frac{a+b}{2}$ και $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Γενικά όταν υπάρχει κάποια σχέση που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την παράμετρο θ (ή τις παραμέτρους θ_1, θ_2) από τις μ και σ^2, τότε υπολογίζουμε πρώτα τις εκτιμήσεις $\bar{x}$ και s^2 και μετά υπολογίζουμε τη θ (ή τις θ_1, θ_2) από την σχέση, όπου αντικαθιστούμε τις μ και σ^2 με τις εκτιμήσεις $\bar{x}$ και s^2 αντίστοιχα. Αυτή είναι η *μέθοδος των ροπών* (method of moments). Η ονομασία προκύπτει από τη χρήση των ροπών στην εκτίμηση των παραμέτρων: τη μέση τιμή μ που είναι η πρώτη ροπή και τη διασπορά σ^2 που είναι η δεύτερη κεντρική ροπή. Αν οι δύο αυτές ροπές δεν επαρκούν, δηλαδή έχουμε να εκτιμήσουμε περισσότερες από δύο παραμέτρους ή οι σχέσεις δε δίνουν μοναδικότητα λύσης για τις παραμέτρους, χρησιμοποιούμε και ροπές μεγαλύτερου βαθμού, αλλά δε θα ασχοληθούμε με τέτοια προβλήματα.

Παράδειγμα 2.1 *Μια εταιρεία Α παράγει ασφάλειες των 40 αμπέρ και θέλουμε να μελετήσουμε κατά πόσο πράγματι καίγονται οι ασφάλειες σε ένταση ρεύματος 40 αμπέρ όπως είναι η ένδειξη τους. Στον Πίνακα 2.1 δίνονται οι μετρήσεις έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος στις οποίες κάηκαν 25 ασφάλειες που δοκιμάσαμε (ο πίνακας περιέχει και ίδιου τύπου δεδομένα γι ασφάλειες από άλλη εταιρεία που θα μελετήσουμε αργότερα). Στον Πίνακα 2.1 δίνεται επίσης το άθροισμα των τιμών, τα τετράγωνα των τιμών καθώς και το άθροισμα των τετραγώνων των τιμών. Για το όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος ασφάλειας 40 αμπέρ της εταιρείας Α η δειγματική μέση τιμή είναι σύμφωνα με τη σχέση (2.1)*

$$\bar{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i = \frac{1}{25}995.1 = 39.80$$

Η δειγματική διασπορά είναι σύμφωνα με τη σχέση (2.4)

$$s^2 = \frac{1}{24}\left(\sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 25\bar{x}^2\right) = \frac{1}{24}(39629 - 25 \cdot 39.80^2) = 0.854.$$

Με βάση αυτό το δείγμα η εκτίμηση της μέση τιμής μ είναι $\bar{x} = 39.80$ αμπέρ και της διασποράς σ^2 είναι $s^2 = 0.854$ (αμπέρ)^2.

Αν η τ.μ. X (το όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος ασφάλειας 40 αμπέρ) ακολουθεί κανονική κατανομή $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, τότε είναι φανερό πως αυτές οι εκτιμήσεις περιγράφουν πλήρως την κανονική κατανομή της X με βάση αυτό το δείγμα.

Αν η τ.μ. X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή σε κάποιο διάστημα $[a,b]$, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους a και b από τις σχέσεις $\mu = \frac{a+b}{2}$ και $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$. Αντικαθιστούμε τις μ και σ^2 με τις εκτιμήσεις $\bar{x}$ και s^2 και λύνουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{rcl} \bar{x} & = & \frac{a+b}{2} \\ s^2 & = & \frac{(b-a)^2}{12} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \hat{a} & = & \bar{x} - \sqrt{3}s \\ \hat{b} & = & \bar{x} + \sqrt{3}s \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \hat{a} = 38.20 \\ \hat{b} = 41.40. \end{array}$$

Α/Α (i)	x_{1i} (αμπέρ)	x_{1i}^2	x_{2i} (αμπέρ)	x_{2i}^2
1	40.9	1672.8	41.6	1730.6
2	40.3	1624.1	41.0	1681.0
3	39.8	1584.0	40.5	1640.2
4	40.1	1608.0	40.8	1664.6
5	39.0	1521.0	39.7	1576.1
6	41.4	1714.0	42.1	1772.4
7	39.8	1584.0	40.5	1640.2
8	41.5	1722.2	42.2	1780.8
9	40.0	1600.0	40.7	1656.5
10	40.6	1648.4	41.3	1705.7
11	38.3	1466.9	39.0	1521.0
12	39.0	1521.0	39.7	1576.1
13	40.9	1672.8	41.6	1730.6
14	39.1	1528.8	39.8	1584.0
15	40.3	1624.1	41.0	1681.0
16	39.3	1544.5	40.0	1600.0
17	39.6	1568.2	40.3	1624.1
18	38.4	1474.6	39.1	1528.8
19	38.4	1474.6	39.1	1528.8
20	40.7	1656.5	41.4	1714.0
21	39.7	1576.1		
22	38.9	1513.2		
23	38.9	1513.2		
24	40.6	1648.4		
25	39.6	1568.2		
Σύνολο	995.1	39629	811.4	32937

Πίνακας 2.1: Δεδομένα ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος για ασφάλειες 40 αμπέρ από δύο εταιρείες: x_{1i} είναι για την εταιρεία Α και x_{2i} για την εταιρεία Β. Στις στήλες 3 και 5 δίνονται και τα τετράγωνα των x_{1i} και x_{2i} και στην τελευταία σειρά δίνεται το σύνολο για κάθε στήλη.

Μέθοδος της Μεγίστης Πιθανοφάνειας Η μέθοδος αυτή δίνει την εκτίμηση που έχει τη μέγιστη πιθανοφάνεια, δηλαδή δίνει την τιμή της παραμέτρου η οποία, μεταξύ όλων των δυνατών τιμών της παραμέτρου, είναι η πιο πιθανή με βάση το τυχαίο δείγμα.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για κάποια τιμή $X = x_i$ που εξαρτάται από κάποια παράμετρο θ παίρνει την τιμή $f(x_i;\theta)$ (αν η X είναι διακριτή τότε αυτή η τιμή εκφράζει την πιθανότητα $\mathrm{P}(X = x_i)$). Επειδή $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι ανεξάρτητες, η πιθανότητα να τις παρατηρήσουμε ταυτόχρονα σ' ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n δίνεται από τη **συνάρτηση πιθανοφάνειας** (likelihood function) ως προς θ

$$L(x_1, \ldots, x_n;\theta) = f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta).$$

Στα προβλήματα εκτίμησης, θεωρούμε τα $\{x_1, \ldots, x_n\}$ δεδομένα και ενδιαφερόμαστε για τη

θ. Άν λοιπόν $L(x_1,\dots,x_n;\theta_1) > L(x_1,\dots,x_n;\theta_2)$ τότε η θ_1 είναι πιο αληθοφανής από τη θ_2 γιατί δίνει μεγαλύτερη πιθανότητα στα παρατηρούμενα $\{x_1,\dots,x_n\}$. Θέλουμε λοιπόν να βρούμε την 'πιο αληθοφανή' τιμή της θ, δηλαδή την τιμή $\hat{\theta}$ που μεγιστοποιεί τη $L(x_1,\dots,x_n;\theta)$ ή καλύτερα, για ευκολότερους υπολογισμούς, τη $\log L(x_1,\dots,x_n;\theta)$. Άρα η **εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας** (maximum likelihood estimator) $\hat{\theta}$ βρίσκεται μηδενίζοντας την παράγωγο της $\log L$ ως προς θ

$$\frac{\partial \log L(x_1,\dots,x_n;\theta)}{\partial\theta} = 0. \tag{2.7}$$

Άν θέλουμε να εκτιμήσουμε δύο ή περισσότερες παραμέτρους $\theta_1,\dots,\theta_m$, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι $L(x_1,\dots,x_n;\theta_1,\dots,\theta_m)$ και οι εκτιμήτριες $\hat{\theta}_1,\dots,\hat{\theta}_m$ βρίσκονται λύνοντας το σύστημα των m εξισώσεων

$$\frac{\partial \log L(x_1,\dots,x_n;\theta_1,\dots,\theta_m)}{\partial\theta_j} = 0 \quad \text{για} \quad j=1,\dots,m. \tag{2.8}$$

Παράδειγμα 2.2 *Έχουμε ένα τυχαίο δείγμα $\{x_1,\dots,x_n\}$ από κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$ και θέλουμε να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή μ θεωρώντας τη σ^2 γνωστή. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής είναι*

$$f_X(x;\mu) \equiv f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας (για την οποία μόνο η παράμετρος μ είναι άγνωστη) είναι

$$\begin{aligned} L(x_1,\dots,x_n;\mu) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right], \end{aligned}$$

όπου $\exp(x) \equiv e^x$. Ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι

$$\log L(x_1,\dots,x_n;\mu) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

Η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\mu}$ βρίσκεται μηδενίζοντας την παράγωγο της $\log L$ (σχέση (2.7))

$$\frac{\partial \log L}{\partial\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \tag{2.9}$$

που δίνει τη λύση

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x},$$

δηλαδή είναι ίδια με την εκτιμήτρια $\bar{x}$ της μέσης τιμής μ που ορίσαμε για οποιαδήποτε κατανομή της τ.μ. X.

Παράδειγμα 2.3 *Άν υποθέσουμε στο προηγούμενο παράδειγμα πως κι η διασπορά σ^2 είναι άγνωστη, τότε στην παραπάνω εξίσωση $\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = 0$ προστίθεται κι η εξίσωση*

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0. \tag{2.10}$$

Η επίλυση του συστήματος των δύο εξισώσεων (2.9) και (2.10) ως προς μ και σ^2 δίνει την ίδια λύση για τη μ και για τη σ^2 είναι

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

Οι εκτιμήτριες μεγίστης πιθανοφάνειας λοιπόν για τη μέση τιμή μ και τη διασπορά σ^2 μιας τ.μ. που ακολουθεί κανονική κατανομή είναι απλά η δειγματική μέση τιμή και διασπορά αντίστοιχα, αλλά για τη διασπορά έχουμε τη 'μεροληπτική' δειγματική διασπορά $\tilde{s}^2$ (σχέση (2.3)). Ασυμπτωτικά όμως (για μεγάλο n) η εκτιμήτρια $\hat{\sigma^2} = \tilde{s}^2$ είναι αμερόληπτη.

Η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας είναι η καλύτερη μέθοδος εκτίμησης αν γνωρίζουμε την κατανομή της τ.μ. X και μπορεί να εφαρμοσθεί σε οποιοδήποτε πρόβλημα εκτίμησης παραμέτρων.

Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων Αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται στην περίπτωση που οι άγνωστες παράμετροι εμφανίζονται σε σχέσεις τυχαίων μεταβλητών και οι σχέσεις αυτές είναι *γραμμικές* ως προς τις παραμέτρους που θέλουμε να εκτιμήσουμε. Μια απλή περίπτωση είναι να έχουμε μια τ.μ. Y και η κάθε τιμή της y να δίνεται από τη σχέση

$$y = \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_m x_m + \epsilon,$$

όπου οι τιμές $x_1, \ldots, x_m$ είναι γνωστές, $\theta_1, \ldots, \theta_m$ είναι οι άγνωστες παράμετροι και ϵ είναι μια άλλη τ.μ. με $\mathrm{E}(\epsilon) = 0$. Θα ασχοληθούμε με τη μέθοδο αυτή στο Κεφάλαιο 2.

Παρατηρήσεις
Η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας μπορεί να εφαρμοσθεί για οποιοδήποτε θ αν γνωρίζουμε την κατανομή $F_X(x;\theta)$ ενώ η μέθοδος των ροπών δεν εφαρμόζεται αν η θ δε μπορεί να υπολογισθεί από τις ροπές.

Η εκτίμηση μεγίστης πιθανοφάνειας έχει όλες τις ιδιότητες καλής εκτιμήτριας, δηλαδή είναι αμερόληπτη (ασυμπτωτικά, δηλαδή η μεροληψία $b(\theta)$ τείνει στο μηδέν για μεγάλα n), συνεπής, αποτελεσματική κι επαρκής. Γι αυτό κι αυτή η μέθοδος είναι η καλύτερη μέθοδος εκτίμησης παραμέτρων αν γνωρίζουμε την κατανομή $F_X(x;\theta)$.

2.2 Εκτίμηση Διαστήματος Εμπιστοσύνης

Η σημειακή εκτίμηση $\hat{\theta}$ από κάποιο δείγμα δεν περιέχει καμιά πληροφορία για την ακρίβεια της εκτίμησης της θ. Είναι ένας αριθμός που δε γνωρίζουμε πόσο κοντά είναι στην πραγματική τιμή της θ κι αλλάζει με το δείγμα. Για παράδειγμα, υπολογίζουμε τη δειγματική μέση τιμή $\bar{x}$

από ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n. Άν πάρουμε ένα άλλο τυχαίο δείγμα ίδιου μεγέθους, η τιμή της $\bar{x}$ θα είναι διαφορετική. Μπορεί να είναι πιο κοντά ή πιο μακριά στην πραγματική τιμή της μ απ' ότι αυτή από το προηγούμενο δείγμα. Γενικά λοιπόν η εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ εξαρτάται από το δείγμα και είναι η ίδια τ.μ. με κάποια κατανομή. Γι αυτό στην εκτίμηση της θ είναι σημαντικό εκτός από τη σημειακή εκτίμηση $\hat{\theta}$ να υπολογίσουμε και διάστημα $[\theta_1, \theta_2]$ που να μπορούμε να πούμε με μεγάλη εμπιστοσύνη ότι θα περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου θ. Στη συνέχεια θα δούμε τέτοια διαστήματα εμπιστοσύνης για διάφορες παραμέτρους, αρχίζοντας από τη μέση τιμή.

2.2.1 Διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής μ

Η σημειακή εκτίμηση της μέσης τιμής μ μιας τ.μ. X είναι η δειγματική μέση τιμή $\bar{x}$ (σχέση (2.1)) που είναι κι αμερόληπτη εκτιμήτρια της μ, δηλαδή η μέση τιμή της $\bar{x}$ είναι η πραγματική τιμή μ που είναι άγνωστη όμως σε μας, $\mu_{\bar{x}} \equiv \mathrm{E}(\bar{x}) = \mu$. Παρ' όλο που η εκτιμήτρια $\bar{x}$ είναι διαφορετική από δείγμα σε δείγμα, επειδή η $\bar{x}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια όταν αυξάνεται το μέγεθος n του δείγματος πλησιάζει τη μέση τιμή μ. Η διασπορά λοιπόν της $\bar{x}$ θα πρέπει να εξαρτάται από το n. Πράγματι για τη διασπορά $\sigma_{\bar{x}}^2$ έχουμε βρει στη σχέση (2.6)

$$\sigma_{\bar{x}}^2 \equiv \mathrm{Var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n},$$

δηλαδή η διασπορά της εκτιμήτριας $\bar{x}$ είναι ανάλογη της διασποράς σ^2 της X κι αντιστρόφως ανάλογη του αριθμού των παρατηρήσεων n. Στην παραπάνω σχέση υποθέτουμε πως οι παρατηρήσεις $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι ανεξάρτητες (εννοώντας και πάλι τις τ.μ. $X_1, \dots, X_n$). Την τυπική απόκλιση (τετραγωνική ρίζα της διασποράς) $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$ της $\bar{x}$ θα την ονομάζουμε **σταθερό σφάλμα** (standard error), γιατί ορίζει το τυπικό σφάλμα εκτίμησης της μ με τη $\bar{x}$.

Η τ.μ. $\bar{x}$ λοιπόν έχει κάποια κατανομή με μέση τιμή $\mu_{\bar{x}} = \mu$ και διασπορά $\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/n$. Με βάση την κατανομή της $\bar{x}$ θέλουμε να υπολογίσουμε το διάστημα εμπιστοσύνης της μ. Για να ορίσουμε την κατανομή της $\bar{x}$ χρειάζεται να ελέγξουμε το μέγεθος του δείγματος, αν η κατανομή της X είναι κανονική κι αν γνωρίζουμε τη διασπορά της. Στη συνέχεια θα ορίσουμε την κατανομή της $\bar{x}$ και το διάστημα εμπιστοσύνης για τη μ που προκύπτει κάτω από τις διάφορες συνθήκες.

Γνωστή διασπορά Θεωρούμε εδώ ότι γνωρίζουμε τη διασπορά σ^2 της τ.μ. X στον πληθυσμό. Για την κατανομή της $\bar{x}$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ **ή** το δείγμα είναι μεγάλο ($n > 30$) τότε και η τ.μ. $\bar{x}$ ακολουθεί κανονική κατανομή $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

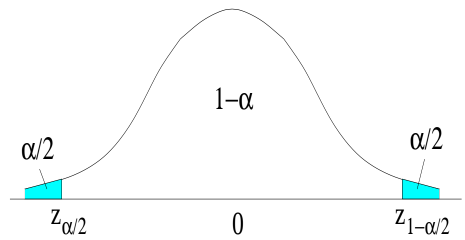
2. Αν δε συμβαίνει το παραπάνω, δηλαδή αν η τ.μ. X δεν ακολουθεί κανονική κατανομή **και** το δείγμα είναι μικρό τότε γενικά δε γνωρίζουμε την κατανομή της $\bar{x}$.

Αν το δείγμα είναι μεγάλο η κανονική κατανομή της $\bar{x}$ δίνεται από το *Κεντρικό Οριακό Θεώρημα*. Αν η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή με γνωστή διασπορά σ^2 τότε και το άθροισμα τέτοιων τ.μ. $x_1, \dots, x_n$ ακολουθεί κανονική κατανομή κι έτσι προκύπτει πως και η $\bar{x}$ ακολουθεί κανονική κατανομή.

Υποθέτοντας ότι η $\bar{x}$ ακολουθεί κανονική κατανομή $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$, η τ.μ. z που προκύπτει από τον απλό μετασχηματισμό $z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή

$$\bar{x} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n) \quad \Rightarrow \quad z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1). \tag{2.11}$$

Για την τυπική κανονική κατανομή μπορούμε να ορίσουμε ένα διάστημα $[z_{\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$, στο οποίο θα ανήκει η z με κάποια δοθείσα πιθανότητα $1-\alpha$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1. Τα



Σχήμα 2.1: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής και οι ουρές της για κάποιο α.

άκρα του διαστήματος, $z_{\alpha/2}$ και $z_{1-\alpha/2}$, λέγονται *κρίσιμες τιμές*. Οι δείκτες $\alpha/2$ και $1-\alpha/2$ δηλώνουν τις τιμές της αθροιστικής συνάρτησης για $z_{\alpha/2}$ και $z_{\alpha/2}$ αντίστοιχα, δηλαδή ισχύει

$$\begin{aligned} \Phi(z_{\alpha/2}) &= \mathrm{P}(z < z_{\alpha/2}) = \alpha/2 \\ \Phi(z_{1-\alpha/2}) &= \mathrm{P}(z < z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2 \end{aligned}$$

όπου $\Phi(z)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση της τυπικής κανονικής κατανομής. Άρα η πιθανότητα να είναι $z < z_{\alpha/2}$ και $z > z_{1-\alpha/2}$ είναι α. Οι δύο σκιασμένες περιοχές στο Σχήμα 2.1 κατέχουν μαζί ποσοστό $\alpha\%$ του συνολικού εμβαδού του ολοκληρώματος της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Αντίστοιχα η πιθανότητα να συμβαίνει $z \in [z_{\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$ είναι $1-\alpha$. Γενικά λοιπόν ισχύει

$$\mathrm{P}(z_{\alpha/2} < z \leq z_{1-\alpha/2}) = \Phi(z_{1-\alpha/2}) - \Phi(z_{\alpha/2}) = 1-\alpha.$$

Επειδή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής είναι συμμετρική ως προς το 0 ισχύει

$$z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}.$$

Άρα στην ουσία για να ορίσουμε το διάστημα $[z_{\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$ χρειαζόμαστε μία μόνο κρίσιμη τιμή.

Ανακεφαλαιώνοντας, βρήκαμε ότι σε κάθε δοθείσα πιθανότητα $1-\alpha$ αντιστοιχεί ένα διάστημα τιμών της τ.μ. z που ορίζεται από την κρίσιμη τιμή $z_{1-\alpha/2}$ που την υπολογίζουμε ως $z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$ από τον στατιστικό πίνακα της τυπικής κανονικής κατανομής. Για παράδειγμα για $\alpha = 0.05$ το διάστημα $[-1.96, 1.96]$ περιέχει την τ.μ. z με πιθανότητα 0.95, όπου $z_{0.975} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$. [Ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε εδώ, όπως και για άλλες κατανομές που θα δούμε παρακάτω, βασίζεται στην αρχή της αντιστοίχισης του δείκτη της κρίσιμης τιμής στην τιμή της αντίστοιχης αθροιστικής συνάρτησης. Σε κάποια βιβλία η θετική κρίσιμη τιμή $z_{1-\alpha/2}$ συμβολίζεται ως $z_{\alpha/2}$ και η αρνητική κρίσιμη τιμή $z_{\alpha/2}$ συμβολίζεται ως $-z_{\alpha/2}$].

Θέλουμε να μετασχηματίσουμε το διάστημα $[z_{\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$ για πιθανότητα $1-\alpha$ στο αντίστοιχο διάστημα που περιέχει την παραμέτρο μ. Γι αυτό λύνουμε τις σχέσεις

$$z_{\alpha/2} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad z_{1-\alpha/2} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

ως προς μ και βρίσκουμε τα άκρα του διαστήματος για τη μέση τιμή μ

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]. \tag{2.12}$$

Το διάστημα αυτό υπολογίστηκε για κάποια δοθείσα πιθανότητα $1-\alpha$ που είναι το προκαθορισμένο **επίπεδο εμπιστοσύνης** (confidence level, λέγεται και στάθμη εμπιστοσύνης) και λέγεται **διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.)** (confidence interval) της μ σε επίπεδο $1-\alpha$. Η ερμηνεία αυτού του διαστήματος θέλει προσοχή. Σε μια πρώτη προσέγγιση θα λέγαμε ότι σημαίνει 'με πιθανότητα (εμπιστοσύνη) $1-\alpha$ η μέση τιμή μ βρίσκεται μέσα σ' αυτό το διάστημα', το οποίο δεν είναι ορθό αφού η μ είναι σταθερό μέγεθος κι όχι τ.μ. για να μιλάμε για την τιμή της με πιθανότητες. Το μέγεθος που αλλάζει (ανάλογα με το δείγμα) είναι το διάστημα και σ' αυτό πρέπει να αναφέρεται η πιθανότητα ή εμπιστοσύνη. Σωστότερη λοιπόν ερμηνεία είναι ότι 'αν χρησιμοποιούσαμε πολλά τέτοια διαστήματα από διαφορετικά δείγματα, ποσοστό $(1-\alpha)\%$ απ' αυτά θα περιείχαν τη μ' ή 'με $1-\alpha$ πιθανότητα (εμπιστοσύνη) το διάστημα αυτό θα περιέχει την πραγματική μ'.

Συνοπτικά η διαδικασία για τον προσδιορισμό του διαστήματος εμπιστοσύνης της μ είναι

Επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης $1-\alpha$

$\Downarrow$

Υπολογισμός του $z_{1-\alpha/2}$ από τον αντίστοιχο στατιστικό
πίνακα για την τυπική κανονική κατανομή

$\Downarrow$

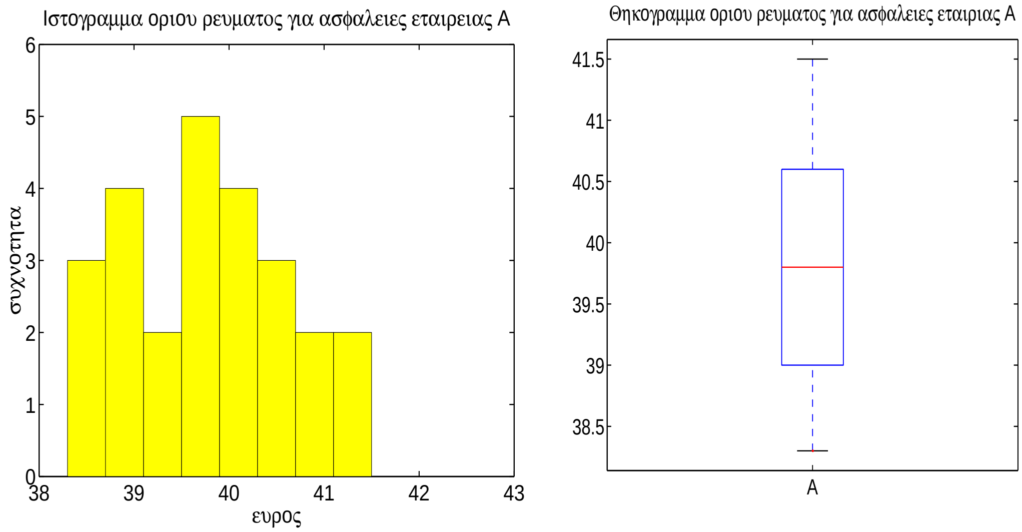
Υπολογισμός του διαστήματος $[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$, όπου

- το σ είναι γνωστό,
- το $\bar{x}$ υπολογίζεται από το δείγμα των n παρατηρήσεων.

Παράδειγμα 2.4 *Θέλουμε να εκτιμήσουμε διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 95% για το μέσο όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος για ασφάλειες των 40 αμπέρ που παράγει η εταιρία Α από τα δεδομένα του Πίνακα 2.1. Υποθέτουμε ότι από παλιότερες μετρήσεις γνωρίζουμε ότι η διασπορά για αυτό το όριο είναι $\sigma^2 = 1$ (αμπέρ)^2.*

Το δείγμα είναι μικρό ($n = 25 < 30$). Εξετάζουμε τη δειγματική κατανομή του ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος από τα δεδομένα μας. Γι αυτό σχεδιάζουμε το ιστόγραμμα και το θηκόγραμμα των δεδομένων του Πίνακα 2.1, τα οποία παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.2. Από το ιστόγραμμα και το θηκόγραμμα βλέπουμε ότι η κατανομή του ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος φαίνεται να είναι κανονική (είναι συμμετρική και δεν έχει μακριές ουρές). Ειδικά για το θηκόγραμμα φαίνεται να τηρούνται τα τρία χαρακτηριστικά που συνιστούν κανονική κατανομή όπως τα θέσαμε στην Παράγραφο 1.2:

- *Η διάμεσος δεν τείνει προς το Q_1 ή το Q_3.*
- *Οι μύστακες έχουν περίπου το ίδιο μήκος.*
- *Δεν υπάρχουν ακραίες τιμές ή απομακρισμένες τιμές.*



Σχήμα 2.2: Ιστόγραμμα και θηκόγραμμα των δεδομένων του ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος για ασφάλειες της εταιρίας Α του Πίνακα 2.1.

Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι το όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος X ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, 1)$ και τότε η δειγματική μέση τιμή $\bar{x}$ του ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή $N(\mu, 1/25)$, όπου $n = 25$ είναι το μέγεθος του δείγματος.

Για την εκτίμηση του δ.ε. της μ ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. *Το επίπεδο εμπιστοσύνης είναι $1 - \alpha = 0.95$ ($\alpha = 0.05$).*

2. *Από τον στατιστικό πίνακα έχουμε $z_{0.975} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$.*

3. *Η διασπορά είναι γνωστή, $\sigma^2 = 1\,(\text{αμπέρ})^2$. Η δειγματική μέση τιμή έχει υπολογιστεί στο Παράδειγμα 2.1 και είναι $\bar{x} = 39.80$ αμπέρ. Το 95% δ.ε. για τη μέση τιμή μ είναι*

$$39.80 \pm 1.96\frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad [39.41, 40.20].$$

Άρα το 95% δ.ε. του μέσου ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος για ασφάλειες των 40 αμπέρ της εταιρίας Α με βάση το δείγμα είναι $[39.41, 40.20]$. Μπορούμε να πούμε ότι η σημειακή εκτίμηση $\bar{x} = 39.80$ είναι αρκετά ακριβής αφού το αντίστοιχο 95% δ.ε. είναι αρκετά μικρό. Επίσης παρατηρούμε ότι το 95% δ.ε. περιέχει το 40, δηλαδή με 95% εμπιστοσύνη μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κατά μέσο όρο οι ασφάλειες που παράγει η εταιρία Α διασφαλίζουν την ένδειξή τους και καίγονται πράγματι σε ένταση ηλεκτρικού ρεύματος 40 αμπέρ.

Άγνωστη διασπορά Γενικά η διασπορά σ^2 της τ.μ. X είναι άγνωστη και την εκτιμούμε από το δείγμα με τη δειγματική διασπορά s^2 (π.χ. δες την (2.4) που χρησιμοποιούμε για τους υπολογισμούς).

Μεγάλο n

Αν το δείγμα είναι μεγάλο ($n > 30$) η εκτιμήτρια s^2 είναι αρκετά ακριβής κι απλά μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη διασπορά σ^2 με τη δειγματική διασπορά s^2 στην παραπάνω διαδικασία για να πάρουμε το διάστημα εμπιστοσύνης για τη μ. Άρα για μεγάλο n κι άγνωστη διασπορά η διαδικασία υπολογισμού του δ.ε. της μ δίνεται ως εξής.

δ.ε. για μ: άγνωστη διασπορά και n μεγάλο

Επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης $1-\alpha$

$\Downarrow$

Υπολογισμός του $z_{1-\alpha/2}$ από τον αντίστοιχο στατιστικό πίνακα για την τυπική κανονική κατανομή

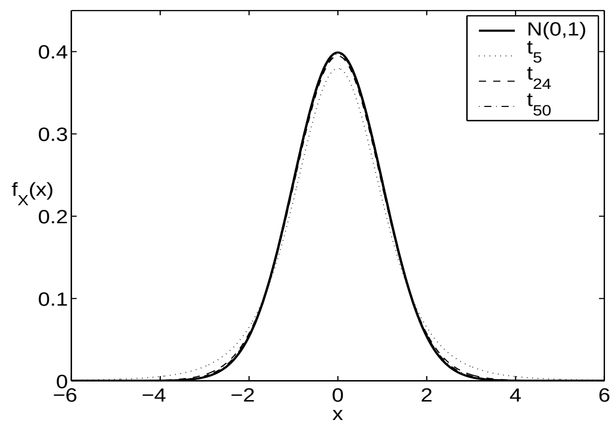
$\Downarrow$

Υπολογισμός του διαστήματος $[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}},\, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}]$, όπου

- το s υπολογίζεται από το δείγμα των n παρατηρήσεων,
- το $\bar{x}$ υπολογίζεται από το δείγμα των n παρατηρήσεων.

Μικρό n

Αν το δείγμα είναι μικρό τότε η προσέγγιση δεν είναι καλή και το διάστημα μπορεί να είναι αρκετά ανακριβές ακόμα κι αν γνωρίζουμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή.



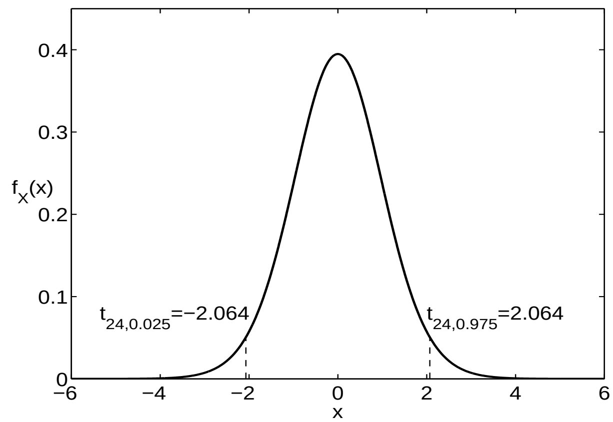
Σχήμα 2.3: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την τυπική κανονική κατανομή και την κατανομή student με 5, 24 και 50 βαθμούς ελευθερίας, όπως δείχνει το επεξήγημα των γραμμών.

Για μικρό n και υποθέτοντας πως η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή, η τ.μ. t που ορίζεται ως $t \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ ακολουθεί την **κατανομή student** ή **t-κατανομή** με $v = n-1$ βαθμούς ελευθερίας

$$t \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{n-1}.$$

κατανομή αυτή μοιάζει με την τυπική κανονική κατανομή και την προσεγγίζει καθώς αυξάνει ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3. Για μεγάλο n η προσέγγιση είναι πολύ καλή κι οι τιμές των t και z είναι πρακτικά ίδιες.

Η διαδικασία για την εκτίμηση του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι όπως παραπάνω αλλά η κρίσιμη τιμή είναι $t_{n-1,1-\alpha/2}$ αντί για $z_{1-\alpha/2}$ και τη βρίσκουμε από το στατιστικό πίνακα της κατανομής student. [Η κρίσιμη τιμή της t ορίζεται από το $1-\alpha/2$ αλλά και από τους βαθμούς ελευθερίας $v = n-1$. Στο Σχήμα 2.4 παρουσιάζεται η κατανομή student για $v = 24$ και οι κρίσιμες τιμές της για $1-\alpha = 0.95$.] Το διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο $1-\alpha$ είναι



Σχήμα 2.4: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την κατανομή student με 24 βαθμούς ελευθερίας κι η δεξιά κι αριστερή κρίσιμη τιμή της για $1-\alpha = 0.95$.

$$\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \text{ή} \qquad [\bar{x} - t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}]. \tag{2.13}$$

Αναλυτικά η διαδικασία υπολογισμού του δ.ε. της μ δίνεται ως εξής.

δ.ε. για μ: άγνωστη διασπορά, μικρό n και $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$

Επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης $1-\alpha$

$\Downarrow$

Υπολογισμός του $t_{n-1,1-\alpha/2}$ από τον αντίστοιχο στατιστικό πίνακα για την κατανομή student

$\Downarrow$

Υπολογισμός του διαστήματος $\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$, όπου

- το s υπολογίζεται από το δείγμα των n παρατηρήσεων.
- το $\bar{x}$ υπολογίζεται από το δείγμα των n παρατηρήσεων.

Παράδειγμα 2.5 *Για το προηγούμενο παράδειγμα 2.4 υποθέτουμε πως η διασπορά είναι άγνωστη (που είναι και η πιο πιθανή περίπτωση για το πραγματικό πρόβλημα). Το δείγμα είναι αρκετά μεγάλο ($n = 25$) κι ίσως θα μπορούσαμε να υποθέσουμε πως η $\bar{x}$ σαν τ.μ. ακολουθεί κανονική κατανομή και να χρησιμοποιήσουμε στους υπολογισμούς του διαστήματος εμπιστοσύνης την κρίσιμη τιμή $z_{1-\alpha/2}$. Για να εκτιμήσουμε όμως το διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος της ασφάλειας με την καλύτερη δυνατή ακρίβεια χρησιμοποιούμε την κρίσιμη τιμή $t_{n-1,1-\alpha/2}$ από την κατανομή student.*

Στο Παράδειγμα 2.1 είχαμε υπολογίσει από το δείγμα των 25 ασφαλειών τη δειγματική μέση $\bar{x} = 39.80$ αμπέρ και τη δειγματική διασπορά $s^2 = 0.854\,(\text{αμπέρ})^2$. Από το στατιστικό πίνακα για την κατανομή student, για $1-\alpha/2 = 0.975$ και $n-1 = 24$, βρίσκουμε $t_{24,0.975} = 2.064$ και το δ.ε. για τη μ είναι

$$39.80 \pm 2.064\frac{\sqrt{0.854}}{5} \quad \rightarrow \quad [39.42,\, 40.18].$$

Η χρήση της κρίσιμης τιμής $t_{24,\,0.975} = 2.064$ υπαγορεύεται από τη χρήση της εκτίμησης s^2 αντί της πραγματικής διασποράς σ^2 που δεν τη γνωρίζουμε. Αν αποφασίζαμε εσφαλμένα να χρησιμοποιήσουμε στους παραπάνω υπολογισμούς τη $z_{0.975} = 1.96$ της κανονικής κατανομής θα βρίσκαμε το διάστημα $[39.44, 40.16]$ πού είναι ελάχιστα μικρότερο (αφού $z_{0.975} < t_{24,\,0.975}$). Το διάστημα όμως αυτό δεν είναι ακριβές γιατί κάναμε την υπόθεση για κανονική κατανομή της $\bar{x}$ που δεν εφαρμόζεται στην περίπτωση που η διασπορά είναι άγνωστη και το δείγμα είναι μικρό.

Γενικά όταν τον n δεν είναι μεγάλο το διάστημα εμπιστοσύνης της $\bar{x}$ που παίρνουμε υποθέτοντας ότι η $\bar{x}$ ακολουθεί κατανομή student είναι πιό μεγάλο από αυτό που παίρνουμε υποθέτοντας ότι η $\bar{x}$ ακολουθεί κανονική κατανομή και η διασπορά παραμένει η ίδια.

Μη κανονική κατανομή και μικρά δείγματα Σε κάποιες περιπτώσεις το δείγμα μπορεί να είναι μικρό **και** η κατανομή της τ.μ. X που παρατηρούμε να μην είναι κανονική. [Όταν δε ξέρουμε τίποτε για την κατανομή της X αυτό το εκτιμούμε από τα δεδομένα του δείγματος, π.χ. από τη μορφή του ιστογράμματος των δεδομένων.] Σε μια τέτοια περίπτωση (κι ανεξάρτητα από το αν η διασπορά είναι γνωστή ή όχι) δε μπορούμε να υποθέσουμε πως η $\bar{x}$ ακολουθεί κάποια συγκεκριμένη κατανομή και στη συνέχεια να εκτιμήσουμε διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ.

Όταν η κατανομή δεν είναι κανονική δεν είναι και συμμετρική. Σε τέτοιες περιπτώσεις ενδιαφερόμαστε για τη διάμεσο $\delta = \delta_X$ της τ.μ. X αντί της $\mu = \mu_X$. Η σημειακή εκτίμηση $\tilde{x}$ της δ είναι απλά η κεντρική τιμή των παρατηρήσεων διαταγμένες σε αύξουσα σειρά (δες Παράγραφο 1.2.1). Το διάστημα εμπιστοσύνης για τη δ βρίσκεται με τη μέθοδο Wilcoxon που βασίζεται στην τάξη των παρατηρήσεων παρά στις τιμές τους. Αυτή η εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης λέγεται **μη παραμετρική** (επειδή δεν υποθέτουμε κάποια κατανομή και τις παραμέτρους της για την εκτιμήτρια).

Παρατηρήσεις

Γενικά θα θέλαμε το διάστημα εμπιστοσύνης να είναι όσο το δυνατό μικρότερο για να έχουμε όσο το δυνατόν πιο ακριβή σημειακή εκτίμηση. Το διάστημα εμπιστοσύνης εξαρτάται από:

- την κατανομή και τη διασπορά σ^2 της τ.μ. X [αυτά δε μπορούμε να τα αλλάξουμε, είναι χαρακτηριστικά της τ.μ. που μελετάμε].
- το μέγεθος n του δείγματος [αύξηση του n έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση του εύρους του δ.ε., που είναι φυσικά επιθυμητό αλλά όχι πάντοτε εφικτό, αφού η απόκτηση πολλών παρατηρήσεων μπορεί να είναι εργασία επίπονη και πολυέξοδη].
- το επίπεδο εμπιστοσύνης $1-\alpha$ [αυτό το καθορίζουμε εμείς, αλλά δε θα θέλαμε να μικρύνουμε το διάστημα μειώνοντας την εμπιστοσύνη μας σ' αυτό γιατί τότε τα αποτελέσματά μας δε θα είχαν την επιθυμητή στατιστική σημαντικότητα]. Το επίπεδο εμπιστοσύνης που συνήθως χρησιμοποιείται στην πράξη είναι 95%.

Στον Πίνακα 2.2 συνοψίζεται η εκτίμηση του διαστήματος εμπιστοσύνης της μ στις διάφορες περιπτώσεις.

διασπορά	*κατανομή της X*	n	*κατανομή της $\bar{x}$*	*διάστημα εμπιστοσύνης*
γνωστή	κανονική		$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
γνωστή	μη κανονική	μεγάλο	$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
γνωστή	μη κανονική	μικρό	—	—
άγνωστη		μεγάλο	$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$
άγνωστη	κανονική	μικρό	$t \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$	$\bar{x} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$
άγνωστη	μη κανονική	μικρό	—	—

Πίνακας 2.2: Εκτίμηση του διαστήματος εμπιστοσύνης της μ ανάλογα με τη γνώση της διασποράς και κατανομής της τ.μ. X και το μέγεθος n του δείγματος.

Εύρος διαστήματος εμπιστοσύνης Πολλές φορές πριν να κάνουμε το πείραμα και συλλέξουμε τις μετρήσεις προκαθορίζουμε ένα συγκεκριμένο εύρος για το δ.ε. ή ζητάμε το εύρος του δ.ε. να μην ξεπερνάει κάποιο ανώτατο όριο για να έχουν νόημα τα αποτελέσματα. Για να το πετύχουμε αυτό χωρίς να αλλάξουμε τη σημαντικότητα των στατιστικών αποτελεσμάτων, βρίσκουμε το μέγεθος n του δείγματος που μας δίνει αυτό το εύρος του δ.ε. Αυτό υπολογίζεται θέτοντας το εύρος του δ.ε. ίσο με την τιμή που ζητάμε και λύνοντας την εξίσωση ως προς το n. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε πως το δείγμα είναι μικρό και η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή με άγνωστη διασπορά, χρησιμοποιούμε δηλαδή τη σχέση (2.13) για να υπολογίσουμε το δ.ε. της μέσης τιμής μ. Το εύρος του δ.ε. είναι

$$w = 2\, t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{2.14}$$

και λύνοντας ως προς n βρίσκουμε ότι για να είναι το εύρος του δ.ε. ίσο με w πρέπει το δείγμα να έχει μέγεθος

$$n = \left(2\, t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{w}\right)^2 . \tag{2.15}$$

Στην παραπάνω σχέση η τιμή $t_{n-1,1-\alpha/2}$ δεν είναι γνωστή αφού το n είναι άγνωστο και ζητούμενο. Θα πρέπει λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την τιμή $t_{n-1,1-\alpha/2}$ που συμφωνεί καλύτερα με το αποτέλεσμα για το n από την (2.15). Αν το n παίρνει μεγάλες τιμές το παραπάνω πρόβλημα δεν υφίσταται αφού για μεγάλα n η κρίσιμη τιμή $t_{n-1,1-\alpha/2}$ είναι πρακτικά ίδια με την αντίστοιχη κρίσιμη τιμή της τυπικής κανονικής κατανομής $z_{1-\alpha/2}$. Άρα για μεγάλο n η σχέση (2.15) δίνεται ως

$$n = \left(2\, z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{w}\right)^2 . \tag{2.16}$$

Παράδειγμα 2.6 *Στο προηγούμενο παράδειγμα για το όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος που καίγονται οι ασφάλειες 40 αμπέρ υπολογίσαμε το 95% δ.ε. του μέσου ορίου έντασης κάνοντας χρήση της κατανομή student και βρήκαμε ότι είναι* $[39.42,\ 40.18]$ *αμπέρ. Το εύρος του δ.ε. είναι*

$w = 40.18 - 39.42 = 0.76$ *αμπέρ. Αν θέλουμε το εύρος του δ.ε. να μην ξεπερνάει* 0.5 *αμπέρ τότε αντί για 25 ασφάλειες πρέπει να δοκιμάσουμε*

$$n = \left(2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sqrt{0.854}}{0.5}\right)^2 = 52.5 \rightarrow 53,$$

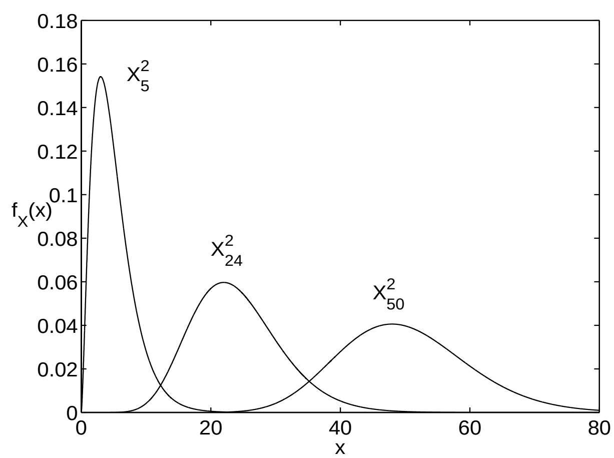
δηλαδή πρέπει να αυξήσουμε το δείγμα σε 53 ασφάλειες (στρογγυλοποιούμε πάντα στον αμέσως μεγαλύτερο ακέραιο).

2.2.2 Διάστημα εμπιστοσύνης της διασποράς σ^2

Όπως για να βρούμε διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ ορίσαμε πρώτα την κατανομή της εκτιμήτριας $\bar{x}$ έτσι και για να βρούμε διάστημα εμπιστοσύνης για τη διασπορά σ^2 ορίζουμε πρώτα την κατανομή της αμερόληπτης εκτιμήτριας s^2 της σ^2 (σχέση (2.2)). Γνωρίζουμε ότι η $\chi^2 \equiv \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ ακολουθεί την κατανομή $\mathcal{X}^2$ με $v = n-1$ βαθμούς ελευθερίας

$$\chi^2 \equiv \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{n-1}.$$

Στο Σχήμα 2.5 παρουσιάζεται η μορφή της κατανομής $\mathcal{X}^2$ για χαρακτηριστικούς βαθμούς ελευθερίας. Για λίγους βαθμούς ελευθερίας η κατανομή $\mathcal{X}^2$ είναι αρκετά λοξή και γίνεται πιο



Σχήμα 2.5: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την κατανομή $\mathcal{X}^2$ με 5, 24 και 50 βαθμούς ελευθερίας.

συμμετρική καθώς αυξάνουν οι βαθμοί ελευθερίας. Για πολύ μεγάλο n η $\mathcal{X}^2$ προσεγγίζει την κανονική κατανομή.

Για δοθείσα πιθανότητα $1-\alpha$ μπορούμε να βρούμε από τον στατιστικό πίνακα για τη κατανομή $\mathcal{X}^2$ τις δύο κρίσιμες τιμές $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ και $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ για τις οποίες ισχύει

$$\mathrm{P}(\chi^2_{n-1,\alpha/2} < \chi^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}) = 1-\alpha. \tag{2.17}$$

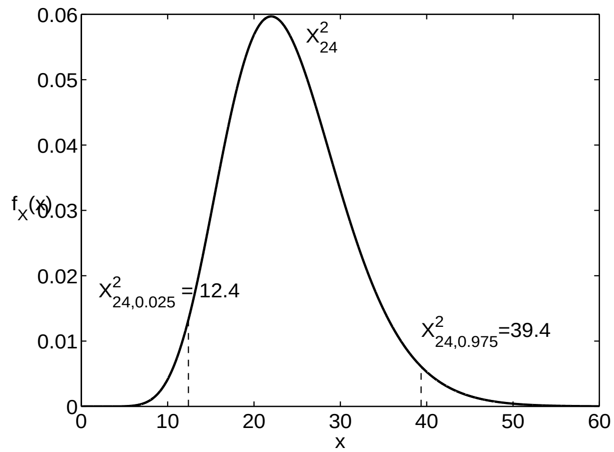
Επειδή η $\mathcal{X}^2$ δεν είναι συμμετρική έχουμε δύο κρίσιμες τιμές: την αριστερή κρίσιμη τιμή $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ που είναι τέτοια ώστε

$$\mathrm{P}(\chi^2 < \chi^2_{n-1,\alpha/2}) = \alpha/2$$

και τη δεξιά κρίσιμη τιμή $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ που είναι τέτοια ώστε

$$\mathrm{P}(\chi^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2.$$

[Οι δείκτες $\alpha/2$ και $1-\alpha/2$ των κρίσιμων τιμών είναι κι οι τιμές της αντίστοιχης αθροιστικής συνάρτησης κατανομής.] Στο Σχήμα 2.6 παρουσιάζεται η κατανομή $\mathcal{X}^2$ για $n-1=24$ βαθμούς ελευθερίας καθώς κι οι κρίσιμες τιμές της για $1-\alpha=0.95$.



Σχήμα 2.6: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την κατανομή $\mathcal{X}^2$ με 24 βαθμούς ελευθερίας κι η δεξιά κι αριστερή κρίσιμη τιμή της για $1-\alpha=0.95$.

Στη σχέση (2.17), λύνοντας τις δύο ανισότητες

$$\chi^2_{n-1,\alpha/2} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$$

ως προς σ^2 βρίσκουμε το $(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνη για τη σ^2

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right], \tag{2.18}$$

όπου η δειγματική διασπορά s^2 υπολογίζεται από το δείγμα των n παρατηρήσεων.

Αναλυτικά η διαδικασία υπολογισμού του δ.ε. της σ^2 δίνεται ως εξής.

δ.ε. για σ^2: $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$

Επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης $1-\alpha$

$\Downarrow$

Υπολογισμός των $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ και $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ από τον αντίστοιχο στατιστικό πίνακα για την κατανομή $\mathcal{X}^2$

$\Downarrow$

Υπολογισμός του διαστήματος $\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right]$, όπου

- το s^2 υπολογίζεται από το δείγμα των n παρατηρήσεων.

Το 95% δ.ε. για την τυπική απόκλιση σ έχει σαν άκρα τις τετραγωνικές ρίζες των αντίστοιχων άκρων του 95% δ.ε. για τη διασπορά σ^2.

Παράδειγμα 2.7 *Από τα δεδομένα για το όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος ασφάλειας της εταιρίας Α στον Πίνακα 2.1 θέλουμε να εκτιμήσουμε τη διασπορά σ^2 του ορίου έντασης. Η σημειακή εκτίμηση βρέθηκε να είναι $s^2 = 0.854\,(\text{αμπέρ})^2$. Για $n-1 = 24$ και $\alpha = 0.05$ από τον στατιστικό πίνακα για τη $\mathcal{X}^2$ βρίσκουμε $\chi^2_{24,\,0.025} = 12.4$ και $\chi^2_{24,\,0.975} = 39.4$ (δες επίσης Σχήμα 2.6). Το 95% δ.ε. για τη σ^2 είναι*

$$\left[\frac{24 \cdot 0.854}{39.4},\ \frac{24 \cdot 0.854}{12.4}\right] = [0.52,\ 1.65].$$

Το 95% δ.ε. για την τυπική απόκλιση σ του ορίου ηλεκτρικού ρεύματος είναι

$$[\sqrt{0.52},\ \sqrt{1.65}] = [0.72,\ 1.28].$$

Στο παραπάνω παράδειγμα παρατηρούμε ότι η εκτίμηση $s^2 = 0.854\,(\text{αμπέρ})^2$ είναι πιο κοντά στο αριστερό άκρο του διαστήματος εμπιστοσύνης. Γενικά το διάστημα εμπιστοσύνης για τη διασπορά σ^2 δεν είναι συμμετρικό ως προς τη σημειακή εκτίμηση s^2 κι αυτό γιατί η κατανομή $\mathcal{X}^2$ δεν είναι συμμετρική όπως είναι η κανονική κατανομή κι η κατανομή student. Όσο αυξάνουν όμως οι βαθμοί ελευθερίας (δηλαδή το μέγεθος δείγματος) η $\mathcal{X}^2$ κατανομή προσεγγίζει την κανονική κατανομή (δες Σχήμα 2.5). Γι αυτό για πολύ μεγάλα δείγματα το διάστημα εμπιστοσύνης μπορεί να υπολογισθεί κι από άλλο τύπο που περιέχει κρίσιμες τιμές της τυπικής κανονικής κατανομής.

2.2.3 Διάστημα εμπιστοσύνης της διαφοράς δύο μέσων τιμών $\mu_1 - \mu_2$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε τη διαφορά των μέσων τιμών μ_1 και μ_2 δύο ανεξάρτητων τ.μ. X_1 και X_2 έχοντας δύο δείγματα μεγέθους n_1 και n_2 από τον πληθυσμό της X_1 και τον πληθυσμό της X_2 αντίστοιχα.

Η σημειακή εκτίμηση της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$ είναι απλά η διαφορά των δειγματικών μέσων τιμών $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$. Για το διάστημα εμπιστοσύνης της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$ πρέπει να ελέγξουμε την κατανομή της εκτιμήτριας $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$, όπως κάναμε στην εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ.

Γνωστές διασπορές Θεωρούμε ότι γνωρίζουμε τις διασπορές σ_1^2 και σ_2^2 των X_1 και X_2. Υποθέτουμε επίσης ότι τα δείγματα είναι αρκετά μεγάλα **ή** η κατανομή των X_1 και X_2 είναι κανονική. Τότε η εκτιμήτρια $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \equiv \mathrm{E}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

και διασπορά

$$\sigma^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \equiv \mathrm{Var}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}.$$

Αν οι X_1 και X_2 είναι *ομοσκεδαστικές*, δηλαδή $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, τότε η διασπορά είναι $\sigma^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})$.

Η διαδικασία είναι ίδια όπως για την εύρεση του διαστήματος εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ αν κάνουμε τις παρακάτω αντικαταστάσεις:

$$\begin{array}{rccc} \text{εκτιμήτρια} & \bar{x} & \longrightarrow & \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \\ \text{μέση τιμή εκτιμήτριας} & \mu & \longrightarrow & \mu_1 - \mu_2 \\ \text{διασπορά εκτιμήτριας} & \dfrac{\sigma^2}{n} & \longrightarrow & \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}. \end{array}$$

Επομένως το διάστημα εμπιστοσύνης της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$ είναι

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}. \tag{2.19}$$

δ.ε. για $\mu_1 - \mu_2$: γνωστές διασπορές και είτε n_1,n_2 μεγάλα ή $X_1 \sim \mathbf{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $X_2 \sim \mathbf{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

Επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης $1 - \alpha$

$\Downarrow$

Υπολογισμός του $z_{1-\alpha/2}$ από τον αντίστοιχο στατιστικό πίνακα για την τυπική κανονική κατανομή

$\Downarrow$

Υπολογισμός του διαστήματος $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$, όπου

- το σ_1^2 και σ_2^2 είναι γνωστά και
- το $\bar{x}_1$ και $\bar{x}_2$ υπολογίζονται από τα δείγματα των n_1 και n_2 παρατηρήσεων.

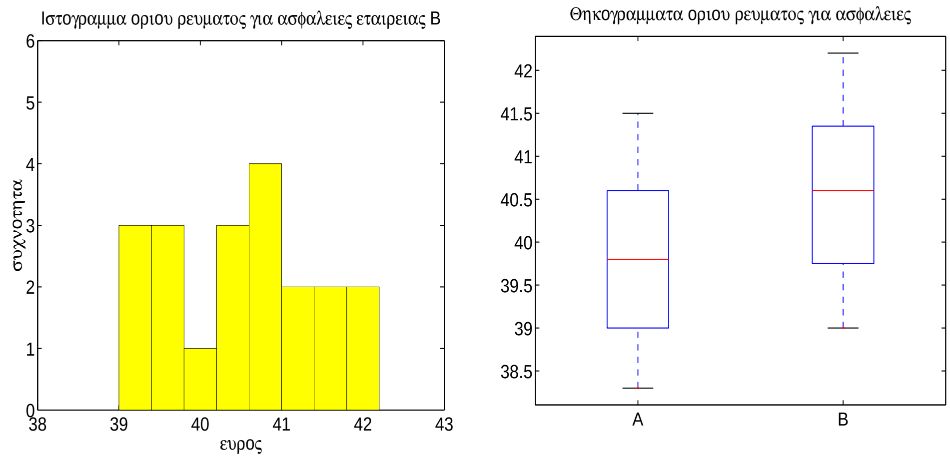
Συχνά στην πράξη με την εκτίμηση του διαστήματος εμπιστοσύνης της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$ θέλουμε να διαπιστώσουμε αν κατά μέσο όρο η μια τ.μ. είναι διαφορετική (μεγαλύτερη ή μικρότερη) από την άλλη. Στη συνέχεια, αν διαπιστώσουμε πως η διαφορά είναι στατιστικά σημαντική, το διάστημα εμπιστοσύνης δίνει επίσης εκτίμηση του μεγέθους αυτής της διαφοράς. Το διάστημα εμπιστοσύνης λοιπόν το ερμηνεύουμε ως εξής:

- Αν περιέχει το μηδέν τότε δε μπορούμε να πούμε ότι οι μέσες τιμές των τ.μ. X_1 και X_2 διαφέρουν με στατιστική σημαντικότητα για το επίπεδο σημαντικότητας α που χρησιμοποιήσαμε και με βάση τα συγκεκριμένα δεδομένα.

- Αν είναι θετικό τότε μπορούμε να πούμε πως για το επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - \alpha$ που χρησιμοποιήσαμε η τ.μ. X_1 είναι κατά μέσο όρο μεγαλύτερη από τη X_2 κατά ένα ποσό που καθορίζεται από τα όρια του διαστήματος που εκτιμήσαμε. Αντίστοιχα ερμηνεύουμε το διάστημα εμπιστοσύνης όταν είναι αρνητικό.

Παράδειγμα 2.8 *Ενδιαφερόμαστε να διαπιστώσουμε αν το όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος που καίγονται ασφάλειες 40 αμπέρ της εταιρίας A είναι κατά μέσο όρο διαφορετικό από το όριο για ίδιου τύπου ασφάλειες κατασκευασμένες από μια άλλη εταιρία B. Γι αυτό θέλουμε να* *εκτιμήσουμε το 95% δ.ε. για τη διαφορά των μέσων τιμών μ_1 και μ_2 του ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος για τις ασφάλειες της εταιρίας A και της εταιρίας B αντίστοιχα. Δίνεται ότι η διασπορά είναι κοινή και γνωστή και είναι $\sigma^2 = 1\,(\alpha\mu\pi\acute{\epsilon}\rho)^2$.*

Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζονται 25 μετρήσεις του ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος για τις ασφάλειες 40 αμπέρ της εταιρίας A και 20 μετρήσεις σε ασφάλειες της εταιρίας B. Στο Παράδειγμα 2.4 είδαμε με τη βοήθεια ιστογράμματος και θηκογράμματος (Σχήμα 2.2) πως το όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος για τις ασφάλειες της εταιρίας A θα μπορούσε να ακολουθεί κανονική κατανομή. Από το ιστόγραμμα και το θηκόγραμμα του Σχήματος 2.7 μπορούμε να πούμε το ίδιο και για το όριο ηλεκτρικού ρεύματος για τις ασφάλειες της εταιρίας B. Άρα μ-



Σχήμα 2.7: Ιστόγραμμα των δεδομένων του ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος για ασφάλειες των 40 αμπέρ της εταιρίας B του Πίνακα 2.1 και θηκογράμματα των δεδομένων του ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος για ασφάλειες των 40 αμπέρ των δύο εταιριών από τον ίδιο πίνακα.

πορούμε να υποθέσουμε πως οι τ.μ. του ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος X_1 και X_2 και για τους δύο πληθυσμούς, δηλαδή τις ασφάλειες 40 αμπέρ και των δύο εταιριών, ακολουθούν κανονική κατανομή. Συγκρίνοντας τα θηκογράμματα για τις ασφάλειες των εταιριών A και B (δες Σχήμα 2.7) φαίνεται ότι η κεντρική τάση (εδώ διάμεσος) του ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος για τις ασφάλειες της εταιρίας B είναι υψηλότερη από αυτή για τις ασφάλειες της εταιρίας A, αλλά ίσως όχι σημαντικά αφού οι δύο θήκες (τα διαστήματα των 50% κεντρικών τιμών του κάθε δείγματος) επικαλύπτονται κατά μεγάλο ποσοστό. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε αν αυτή η διαφορά είναι στατιστικά σημαντική κάνοντας χρήση του διαστήματος εμπιστοσύνης της $\mu_1 - \mu_2$.

Οι δειγματικές μέσες τιμές υπολογίζονται σε $\bar{x}_1 = 39.80$ αμπέρ και $\bar{x}_2 = 40.57$ αμπέρ. Η διαφορά τους είναι $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = -0.77$ αμπέρ. Από τη σχέση (2.19), όπου $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$ και $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 = 1$ βρίσκουμε ότι το 95% δ.ε. είναι

$$-0.77 \pm 1.96\sqrt{1 \cdot \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{20}\right)} \quad \rightarrow \quad [-1.36,\ -0.18].$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% μπορούμε να πούμε πως το μέσο όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος διαφέρει σημαντικά στις ασφάλειες των δύο εταιριών. Συγκεκριμένα οι ασφάλειες των 40 αμπέρ της εταιρίας A καίγονται κατά μέσο όρο σε μικρότερη ένταση *ηλεκτρικού ρεύματος από ότι οι ασφάλειες της εταιρίας Β, κατά ποσό μεταξύ 0.18 και 1.36 αμπέρ.*

Άγνωστες διασπορές Συνήθως όταν δε γνωρίζουμε τις μ_1, μ_2 αγνοούμε και τις σ_1^2, σ_2^2.

Μεγάλο n

Όταν τα δείγματα είναι μεγάλα ($n_1 > 30$ και $n_2 > 30$) μπορούμε να αντικαταστήσουμε στη σχέση (2.19) τις σ_1^2, σ_2^2 με τις δειγματικές μέσες τιμές s_1^2, s_2^2 και να εκτιμήσουμε έτσι το διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$.

δ.ε. για $\mu_1 - \mu_2$: άγνωστες διασπορές και n_1,n_2 μεγάλα

Επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης $1-\alpha$

$\Downarrow$

Υπολογισμός του $z_{1-\alpha/2}$ από τον αντίστοιχο στατιστικό πίνακα για την τυπική κανονική κατανομή

$\Downarrow$

Υπολογισμός του διαστήματος $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$, όπου

- το $\bar{x}_1$ και $\bar{x}_2$ υπολογίζονται από τα δείγματα των n_1 και n_2 παρατηρήσεων.
- το s_1^2 και s_2^2 υπολογίζονται επίσης από τα δείγματα.

Μικρό n

Όταν το μέγεθος του ενός ή και των δύο δειγμάτων είναι μικρό η εκτίμηση του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι πιο περίπλοκη. Στην περίπτωση που οι κατανομές των X_1 και X_2 δε δίνονται να είναι κανονικές (ή δεν προκύπτει από τη περιγραφική μελέτη των δεδομένων), δε μπορούμε γενικά να προσδιορίσουμε την κατανομή της διαφοράς $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ για να εκτιμήσουμε έτσι το διάστημα εμπιστοσύνης και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη μή-παραμετρική προσέγγιση.

Υποθέτουμε λοιπόν πως οι κατανομές των X_1 και X_2 είναι κανονικές κι επιπλέον ομοσκεδαστικές ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$). Σ' αυτήν την περίπτωση ορίζουμε πρώτα τη *δειγματική κοινή διασπορά* s_p^2 ως συνάρτηση των s_1^2 και s_2^2

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}. \tag{2.20}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι η s_p^2 είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της κοινής διασποράς σ^2. Με τη βοήθεια της s_p^2 η εκτίμηση της διασποράς της διαφοράς $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ είναι $s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$. Για την εκτιμήτρια $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ μπορούμε να ορίσουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό που ακολουθεί κατανομή student με $n_1 + n_2 - 2$ βαθμούς ελευθερίας

$$t \equiv \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim \mathrm{t}_{n_1+n_2-2}$$

από το οποίο προκύπτει πως το $(1-\alpha)\%$ δ.ε. της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$ είναι

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}\, s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}. \tag{2.21}$$

δ.ε. για $\mu_1 - \mu_2$: άγνωστες και ίσες διασπορές, n_1,n_2 μικρά και $X_1 \sim \mathbf{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $X_2 \sim \mathbf{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

Επιλογή του επιπέδου εμπιστοσύνης $1 - \alpha$

$\Downarrow$

Υπολογισμός του $t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}$ από τον αντίστοιχο στατιστικό πίνακα για την κατανομή student

$\Downarrow$

Υπολογισμός του διαστήματος $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$, όπου

- το $\bar{x}_1$ και $\bar{x}_2$ υπολογίζονται από τα δείγματα των n_1 και n_2 παρατηρήσεων.
- το s_1^2 και s_2^2 υπολογίζονται επίσης από τα δείγματα.

Παράδειγμα 2.9 *Για το προηγούμενο παράδειγμα ας υποθέσουμε πως η διασπορά του ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος για τις ασφάλιες 40 αμπέρ των δύο εταιριών A και B είναι άγνωστη. Από τα δύο ιστογράμματα και θηκογράμματα στα Σχήματα 2.2 και 2.7 μπορούμε να δεχτούμε ότι οι τ.μ. ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος για τις ασφάλειες και των δύο εταιριών ακολουθούν κανονική κατανομή και μάλιστα έχουν την ίδια διασπορά (το εύρος των τιμών των δύο δειγμάτων είναι περίπου το ίδιο). Επειδή όμως τα δείγματα είναι σχετικά μικρά θα υποθέσουμε ότι η διαφορά $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ ακολουθεί κατανομή student κι όχι κανονική.*

Η δειγματική διασπορά του ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος για τις ασφάλειες της εταιρίας A είναι $s_1^2 = 0.854\,(\text{αμπέρ})^2$ και για την εταιρεία B είναι $s_2^2 = 0.952\,(\text{αμπέρ})^2$ (σχετικά κοντά). Εφαρμόζοντας τη σχέση (2.20) βρίσκουμε ότι η δειγματική κοινή διασπορά είναι ($n_1 = 25$ και $n_2 = 20$)

$$s_p^2 = \frac{(25-1)\cdot 0.854 + (20-1)\cdot 0.952}{25+20-2} = 0.947 \text{ αμπέρ.}$$

Οι βαθμοί ελευθερίας είναι $n_1+n_2-2 = 43$ και για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% βρίσκουμε από τον στατιστικό πίνακα για την κατανομή student την κρίσιμη τιμή $t_{43,\,0.975} = 2.02$ (πολύ κοντά στην αντίστοιχη κρίσιμη τιμή $z_{0.975} = 1.96$ της τυπικής κανονικής κατανομής γιατί οι βαθμοί ελευθερίας είναι πολλοί). Το 95% διάστημα εμπιστοσύνης είναι ($\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = -0.77$)

$$-0.77 \pm 2.02 \cdot 0.947\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{20}} \quad \rightarrow \quad [-1.35,\, -0.19].$$

΄Οπως και πριν που η διασπορά ήταν γνωστή συμπεραίνουμε πως σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% οι ασφάλειες της εταιρίας A κατά μέσο όρο καίγονται σε μικρότερη ένταση ηλεκτρικού ρεύματος απ΄ ότι οι ασφάλειες της εταιρίας B κατά ένα ποσό που κυμαίνεται μεταξύ 0.19 και 1.35 αμπέρ.

Παρατηρήσεις

Οι παράγοντες που επηρεάζουν τον υπολογισμό του διαστήματος εμπιστοσύνης της $\mu_1 - \mu_2$ είναι οι ίδιες όπως για τη μ. Σ' αυτές προστίθεται και ο παράγοντας της ισότητας των διασπορών των X_1 και X_2. Στον Πίνακα 2.3 συνοψίζεται η εκτίμηση του διαστήματος εμπιστοσύνης της $\mu_1 - \mu_2$ στις διάφορες περιπτώσεις.

διασπορές των X_1,X_2	*κατανομή των* X_1,X_2	n_1, n_2	*κατανομή* της $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	*διάστημα εμπιστοσύνης*
γνωστές	κανονική		$z \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
γνωστές	μη κανονική	μεγάλα	$z \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
γνωστές	μη κανονική	μικρά	—	—
άγνωστες άνισες/ίσες		μεγάλα	$z \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
άγνωστες ίσες	κανονική	μικρά	$t \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim \mathrm{t}_{n_1+n_2-2}$	$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$
άγνωστες ίσες	μη κανονική	μικρά	—	—
άγνωστες άνισες		μικρά	—	—

Πίνακας 2.3: Εκτίμηση του διαστήματος εμπιστοσύνης της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$ ανάλογα με τη γνώση των διασπορών και κατανομών των τ.μ. X_1 και X_2 καθώς και των μεγεθών n_1 και n_2 των αντιστοίχων δειγμάτων.

Υπάρχει φανερή αντιστοιχία των περιπτώσεων για το διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής (Πίνακας 2.2) και για το διάστημα εμπιστοσύνης της διαφοράς δύο μέσων τιμών (Πίνακας 2.3, οι έξι πρώτες σειρές). Για τη διαφορά μέσων τιμών υπάρχει ακόμα η περίπτωση των άνισων κι αγνώστων διασπορών σε συνδυασμό με μικρά δείγματα (τελευταία σειρά του Πίνακα 2.3) για την οποία δεν μπορούμε να καθορίσουμε την κατανομή της εκτιμήτριας $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ και απ' αυτήν να βρούμε το διάστημα εμπιστοσύνης. Σ' αυτήν την περίπτωση ούτε η μη παραμετρική εκτίμηση μπορεί να δώσει διάστημα εμπιστοσύνης (για τη διάμεσο).

Για το δ.ε. της μ είχαμε ορίσει τη σχέση του εύρους w του δ.ε. και του μεγέθους n του δείγματος. Επειδή για το δ.ε. της $\mu_1 - \mu_2$ έχουμε μεγέθη δύο δειγμάτων n_1 και n_2 είναι δύσκολο να καθορίσουμε τα n_1 και n_2 για κάποιο εύρος w του διαστήματος εμπιστοσύνης. Αυτό το πρόβλημα δε θα μας απασχολήσει εδώ.

Για το διάστημα εμπιστοσύνης της διαφοράς μέσων τιμών υποθέσαμε οτι οι τ.μ. X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες. Δε θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που οι X_1 και X_2 είναι εξαρτημένες (όταν δηλαδή έχουμε *ζευγαρωτές παρατηρήσεις*) γιατί τέτοια προβλήματα δεν παρουσιάζονται συχνά στη μηχανική.

Τα διαστήματα εμπιστοσύνης, πέρα από το ότι δίνουν ένα εύρος τιμών για την παράμετρο που μελετάμε, μας δίνουν τη δυνατότητα να ελέγξουμε αν μια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου είναι πιθανή βλέποντας αν ανήκει στο διάστημα εμπιστοσύνης. Έτσι, στο τελευταίο παράδειγμα, ελέγχοντας αν η τιμή μηδέν ανήκει στο διάστημα εμπιστοσύνης μας επιτρέπει στην ουσία να ελέγξουμε αν οι δύο μέσες τιμές διαφέρουν σημαντικά ή όχι. Για τον στατιστικό έλεγχο υποθέσεων υπάρχει συγκεκριμένη μεθοδολογία που αποτελεί σημαντικό κομμάτι της στατιστικής με το οποίο όμως δε θα ασχοληθούμε εδώ. Θα πρέπει να τονισθεί ότι τα διαστήματα εμπιστοσύνης που ορίσαμε μας επιτρέπουν να ελέγξουμε αν μια παράμετρος μπορεί να πάρει κάποια τιμή και τα αποτελέσματα είναι ισοδύναμα με αυτά του στατιστικού ελέγχου της ίδιας υπόθεσης.