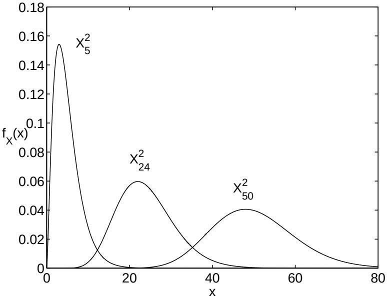
Στατιστική για Ηλεκτρολόγους Μηχανικούς
ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ - 3

Δημήτρης Κουγιουμτζής

13 Μαΐου 2010

Διάστημα εμπιστοσύνης της σ^2

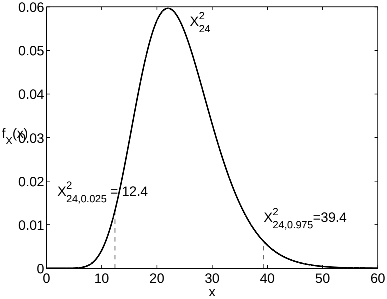
s^2 εκτιμήτρια της σ^2 Δίνεται $\chi^2 \equiv \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{n-1}$



- Για πολύ μεγάλο n: $\mathcal{X}^2_{n-1} \quad \rightarrow \quad$ κανονική
- $\mathcal{X}^2_{n-1}$ δεν είναι συμμετρική κατανομή
- δύο κρίσιμες τιμές:

$$\chi^2_{n-1,\alpha/2} \quad \rightarrow \quad P(\chi^2 < \chi^2_{n-1,\alpha/2}) = \alpha/2$$
$$\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \quad \rightarrow \quad P(\chi^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$$

Διάστημα εμπιστοσύνης της σ^2 (συνέχεια)



$$P\left(\chi^2_{n-1,\alpha/2} < \chi^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(\chi^2_{n-1,\alpha/2} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

Διάστημα εμπιστοσύνης της σ^2 (συνέχεια)

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του σ^2

1. Επιλογή του $1-\alpha$, s^2 από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμων τιμών $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ και $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για κατανομή $\mathcal{X}^2_{n-1}$.
3. Αντικατάσταση στον τύπο $\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right]$

Διάστημα εμπιστοσύνης της τυπικής απόκλισης σ

Το 95% δ.ε. για την τυπική απόκλιση σ έχει ως άκρα τις τετραγωνικές ρίζες των αντίστοιχων άκρων του 95% δ.ε. για τη διασπορά σ^2.

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}}\right]$$

Παράδειγμα

Διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 95% για τη διασπορά του ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος της ασφάλειας 40 αμπέρ;

$\chi^2 \equiv \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{n-1}$, βαθμοί ελευθερίας: $n-1=24$

$s^2 = 0.854\,(\text{αμπέρ})^2$

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του σ^2

1. $1-\alpha = 0.95, \quad s^2 = 0.854.$
2. Κρίσιμες τιμές: $\chi^2_{24,0.025} = 12.4$ και $\chi^2_{24,0.975} = 39.4$.
3. $\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right] = \left[\frac{24\cdot 0.854}{39.4}, \frac{24\cdot 0.854}{12.4}\right] = [0.52,\ 1.65]$

Το 95% δ.ε. για την τυπική απόκλιση σ του ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος είναι
$[\sqrt{0.52},\ \sqrt{1.65}] = [0.72,\ 1.28]$.

Διάστημα εμπιστοσύνης της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$

τ.μ. X_1 με μέση τιμή μ_1 τ.μ. X_2 με μέση τιμή μ_2

Διαφορά $\mu_1 - \mu_2$; [X_1 και X_2 ανεξάρτητες]

Δείγμα $\{x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}\} \quad \rightarrow \quad \bar{x}_1$

Δείγμα $\{x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}\} \quad \rightarrow \quad \bar{x}_2$

Εκτιμήτρια της $\mu_1 - \mu_2$: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$

Κατανομή της $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$; [όπως για $\bar{x}$]

Γνωστές διασπορές σ_1^2 και σ_2^2

Υποθέτουμε

$$\left(X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \wedge X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)\right) \vee (n_1 > 30 \wedge n_2 > 30)$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim \mathrm{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Αν $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ (ομοσκεδαστικές κατανομές)

διασπορά: $\sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$

Δ.ε. της $\mu_1 - \mu_2$, γνωστά σ_1^2 και σ_2^2

Η διαδικασία είναι όπως για δ.ε. της μ:

	μ	$\longrightarrow$	$\mu_1 - \mu_2$
εκτιμήτρια	$\bar{x}$	$\longrightarrow$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$
μέση τιμή της	μ	$\longrightarrow$	$\mu_1 - \mu_2$
διασπορά της	$\frac{\sigma^2}{n}$	$\longrightarrow$	$\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$
δ.ε.	$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$	$\longrightarrow$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

Διαδικασία εκτίμησης δ.ε. της $\mu_1 - \mu_2$

1. Επιλογή του $1-\alpha$, σ_1, σ_2 γνωστά, $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμης τιμής $z_{1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για τυπική κανονική κατανομή.
3. Αντικατάσταση στον τύπο

$$\left[\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

Παράδειγμα: όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος

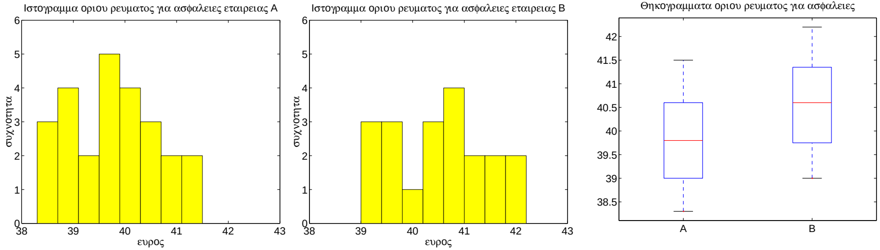
	εταιρεία A		εταιρεία B	
A/A	x_{1i} (αμπέρ)	x_{1i}^2	x_{2i} (αμπέρ)	x_{2i}^2
1	40.9	1672.8	41.6	1730.6
2	40.3	1624.1	41.0	1681.0
3	39.8	1584.0	40.5	1640.2
4	40.1	1608.0	40.8	1664.6
5	39.0	1521.0	39.7	1576.1
6	41.4	1714.0	42.1	1772.4
7	39.8	1584.0	40.5	1640.2
8	41.5	1722.2	42.2	1780.8
9	40.0	1600.0	40.7	1656.5
10	40.6	1648.4	41.3	1705.7
11	38.3	1466.9	39.0	1521.0
12	39.0	1521.0	39.7	1576.1
13	40.9	1672.8	41.6	1730.6
14	39.1	1528.8	39.8	1584.0
15	40.3	1624.1	41.0	1681.0
16	39.3	1544.5	40.0	1600.0
17	39.6	1568.2	40.3	1624.1
18	38.4	1474.6	39.1	1528.8
19	38.4	1474.6	39.1	1528.8
20	40.7	1656.5	41.4	1714.0
21	39.7	1576.1		
22	38.9	1513.2		
23	38.9	1513.2		
24	40.6	1648.4		
25	39.6	1568.2		
Σύνολο	995.1	39629	811.4	32937

Παράδειγμα (συνέχεια)

Δίνεται ότι η διασπορά είναι κοινή και γνωστή $\sigma^2 = 1\,(\text{αμπέρ})^2$

Ζητάμε δ.ε. για $\mu_1 - \mu_2$ Κατανομή της $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$;

- n_1 και n_2 είναι μικρά



$$\Downarrow$$

$$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, 1) \quad \text{και} \quad X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, 1)$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\bar{x}_1 = 39.80 \quad \bar{x}_2 = 40.57 \quad \rightarrow \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = -0.77$$

Διαδικασία εκτίμησης του δ.ε. της $\mu_1 - \mu_2$

1. $1 - \alpha = 0.95, \quad \sigma = 1, \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = -0.77.$
2. Κρίσιμη τιμή: $z_{0.975} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96.$
3. $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} =$
   $-0.77 \pm 1.96\sqrt{1 \cdot \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{20}\right)} \rightarrow [-1.36, \, -0.18]$

Συμπεράσματα

• Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% μπορούμε να πούμε πως το όριο ηλεκτρικού ρεύματος **διαφέρει σημαντικά** στις ασφάλειες της εταιρείας Α και Β.

• Οι ασφάλειες των 40 αμπέρ της εταιρείας Α καίγονται σε **χαμηλότερο** όριο ηλεκτρικού ρεύματος απ΄ ότι οι ασφάλειες των 40 αμπέρ της εταιρείας Β κατά ένα ποσό μεταξύ **0.18** και **1.36**.

Άγνωστες διασπορές σ_1^2 και σ_2^2

Περίπτωση 1: μεγάλα δείγματα $(n_1, n_2 > 30)$

$s_1^2 \quad \longrightarrow \quad \sigma_1^2 \qquad$ και $\qquad s_2^2 \quad \longrightarrow \quad \sigma_2^2$:

$$\left[\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}},\; \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right]$$

Άγνωστες διασπορές σ_1^2 και σ_2^2 (συνέχεια)

Περίπτωση 2: μικρά δείγματα (n_1 ή $n_2 < 30$) **και**
$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2) \;\wedge\; X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$ **και**
ομοσκεδαστικές κατανομές: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Υπολογίζουμε πρώτα την εκτίμηση της κοινής διασποράς

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

s^2 είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της κοινής διασποράς σ^2
Εκτιμήτρια διασποράς της $\mu_1 - \mu_2$: $s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$

$$\Downarrow$$

$$t \equiv \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim \mathrm{t}_{n_1+n_2-2}$$

$$\Downarrow$$

$(1-\alpha)\%$ δ.ε.: $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

Άγνωστες διασπορές σ_1^2 και σ_2^2 (συνέχεια)

Διαδικασία εκτίμησης δ.ε. της $\mu_1 - \mu_2$

1. Επιλογή του $1-\alpha$, s και $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμης τιμής $t_{n_1+n_2-2,\,1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για κατανομή student.
3. Αντικατάσταση στον τύπο
   $$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}\, s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

***Περίπτωση 3*: μικρά δείγματα (n_1 ή $n_2 < 30$) και $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ και $(X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2) \vee X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2))$**

Μη-παραμετρική μέθοδος

***Περίπτωση 4*: μικρά δείγματα (n_1 ή $n_2 < 30$) και $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$**

Δεν υπάρχει γνωστή μέθοδος εκτίμησης δ.ε. (χρησιμοποιούνται τεχνικές επαναδειγματοληψίας)

Παράδειγμα: όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος

Διασπορές ορίου έντασης ηλεκτρικού ρεύματος για ασφάλειες 40 αμπέρ των δύο εταιρειών A και B άγνωστες

Μικρά δείγματα ($n_1 = 25$, $n_2 = 20$) **και**

κατανομές των X_1, X_2 κανονικές [ιστογράμματα, θηκογράμματα]

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = -0.77 \qquad s_1^2 = 0.854 \qquad s_2^2 = 0.952$

$s_1^2 \simeq s_2^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$$s^2 = \frac{24 \cdot 0.854 + 19 \cdot 0.952}{43} = 0.897 \qquad s = 0.947$$

Διαδικασία εκτίμησης του δ.ε. της $\mu_1 - \mu_2$

1. $1 - \alpha = 0.95, \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = -0.77, \quad s = 0.947.$
2. Κρίσιμη τιμή: $t_{43,0.975} = 2.02$
3. $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}\, s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} =$

   $-0.77 \pm 2.02 \cdot 0.947 \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{20}} \quad \rightarrow \quad [-1.35, -0.19]$

Παράδειγμα: όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος (συνέχεια)

Συμπέρασμα:
Σε 95% επίπεδο εμπιστοσύνης μπορούμε να πούμε πως οι ασφάλειες της εταιρείας Α κατά μέσο όρο καίγονται σε μικρότερη ένταση ηλεκτρικού ρεύματος απ΄ ότι οι ασφάλειες της εταιρείας Β με διαφορά μεταξύ 0.19 και 1.35 αμπέρ.

Εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης της $\mu_1 - \mu_2$

διασπορές των X_1, X_2	κατανομή των X_1, X_2	n_1, n_2	κατανομή της $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	διάστημα εμπιστοσύνης
γνωστές	κανονική		$z \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
γνωστές	μη κανονική	μεγάλα	$z \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
γνωστές	μη κανονική	μικρά	—	—
άγνωστες άνισες/ίσες		μεγάλα	$z \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$
άγνωστες ίσες	κανονική	μικρά	$t \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$	$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$
άγνωστες ίσες	μη κανονική	μικρά	—	—
άγνωστες άνισες		μικρά	—	—

Άσκηση

Έγιναν μετρήσεις της συγκέντρωσης διαλυμένου οξυγόνου (Δ.Ο.) σε δύο ποτάμια (σε mg/l)

1.8	2.0	2.1	1.7	1.2	2.3	2.5	2.9	1.6	2.2	2.3	1.8	2.4	1.6	1.9
2.3	2.1	1.9	2.6	2.9	1.5	3.1	2.1	2.7	2.3	2.6	2.5			

1. Βρείτε 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων συγκεντρώσεων Δ.Ο. στα δύο ποτάμια υποθέτοντας πρώτα ότι η διασπορά είναι γνωστή $(0.1\,(mg/l)^2)$ και ίδια για τα δύο δείγματα και μετά χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις των διασπορών από τα δείγματα. Μπορούμε να πούμε πως η μέση συγκέντρωση Δ.Ο. είναι ίδια στα δύο ποτάμια (στην κάθε περίπτωση);
2. Για το ίδιο πρόβλημα, σε 200 μετρήσεις στο πρώτο ποτάμι βρέθηκαν 26 τιμές κάτω από την κρίσιμη τιμή 1.6 mg/l και σε 200 μετρήσεις στο δεύτερο ποτάμι βρέθηκαν 18 τιμές κάτω από την κρίσιμη τιμή. Μπορούμε να πούμε σε επίπεδο 95% ότι η συγκέντρωση Δ.Ο. βρίσκεται σε μη επιθυμητά επίπεδα πιό συχνά στο πρώτο ποτάμι από ότι στο δεύτερο;