

## Ασκήσεις Κεφαλαίου 3

1. Θεωρείστε την στοχαστική διαδικασία AR(1)

$$Y_t = \phi_0 + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}, \quad E[\varepsilon_t] = 0,$$

με  $\phi_0 = 0$ , και θόρυβο εισόδου  $\varepsilon_t$  από κανονική κατανομή και με τυπική απόκλιση 1.

(α) Δημιουργείτε χρονοσειρά μήκους  $n=100$  από την AR(1) διαδικασία με  $\phi = 0.8$ ,  $\phi = 0.4$  και με  $\phi = -0.8$ . Υπολογίστε την αυτοσυσχέτιση  $r(\tau)$  για υστερήσεις  $\tau = 1, 2, \dots, 30$  και σχηματίστε το γράφημα της μαζί με τη θεωρητική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $\rho(\tau)$ . Υπολογίστε και σχηματίστε επίσης το φάσμα ισχύος για τις ίδιες περιπτώσεις (στο γράφημα πάρετε λογάριθμο των συχνοτήτων).

(β) Κάνετε το ίδιο όπως στο (α) αλλά για  $n=10000$ .

(γ) Επαναλάβετε την υπολογιστική διαδικασία στο (α) και (β) αλλά δημιουργείτε τα δεδομένα σας από κατανομή Cauchy, δηλαδή student με 1 βαθμό ελευθερίας.

Βοήθεια matlab: Για τη δημιουργία χρονοσειράς από AR στοχαστική διαδικασία με κανονικό θόρυβο εισόδου μπορείς να χρησιμοποιήσεις τη συνάρτηση AR.m και για τον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης τη συνάρτηση autocor.m, οι οποίες δίνονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος. Για τη δημιουργία τυχαίων αριθμών από κατανομή Student χρησιμοποίησε τη συνάρτηση trnd. Στη συνέχεια μπορείς να τροποποιήσεις τη συνάρτηση AR.m για να παράγει χρονοσειρές με θόρυβο εισόδου από Cauchy κατανομή. Για τον υπολογισμό του φάσματος ισχύος μπορείς να χρησιμοποιήσεις τη συνάρτηση periodogram.

2. Θεωρείστε τη στοχαστική διαδικασία που προκύπτει από το άθροισμα 10 AR(1) στοχαστικών διαδικασιών με διαφορετικούς χρόνους κλίμακας  $\tau_c$ . Για το σχηματισμό τους δημιούργησε 10 AR(1) χρονοσειρές με διαφορετικό συντελεστή  $\phi$  (δες Άσκηση 3.1).

Υπολόγισε και σχημάτισε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και το φάσμα ισχύος χρονοσειράς αθροίσματος 10 AR(1) χρονοσειρών μήκους  $n=100$ . Κάνε το ίδιο για μήκος  $n=10000$ . Προσαρμόζεται ικανοποιητικά στο γράφημα του φάσματος η συνάρτηση  $1/f$ ?

3. Δημιουργείτε μια συνάρτηση που δέχεται ως μεταβλητή εισόδου το φασματικό εκθέτη  $\eta$  και το μήκος  $n$  και δίνει ως έξοδο τη χρονοσειρά μήκους  $n$  που έχει φάσμα ισχύος που ακολουθεί τη σχέση  $S(f) \sim 1/f^\eta$ . Διερευνείτε τη διατήρηση της θεωρητικής σχέσης κλιμάκωσης για το φάσμα ισχύος σε χρονοσειρές που θα δημιουργείτε με τη συνάρτηση αυτή για διαφορετικές τιμές των  $n$  και  $\eta$ .

Βοήθεια matlab: Για τη δημιουργία της χρονοσειράς θα πρέπει να δημιουργήσετε την κατάλληλη σειρά μιγαδικών αριθμών του μετασχηματισμού Fourier την οποία μετά μπορείτε να τη μετασχηματίσετε στη χρονοσειρά με τη συνάρτηση ifft.m. Η σειρά θα πρέπει να έχει συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς συμμετρικά γύρω από μια κεντρική τιμή.

4. Για τις χρονοσειρές που δημιουργήσατε στην παραπάνω άσκηση υπολογίστε τον εκθέτη Hurst (και από αυτόν το φασματικό εκθέτη  $\eta$ ) με τη μέθοδο της διασποράς και τη μέθοδο της αλλαγής κλίμακας του εύρους.  
Βοήθεια matlab: Χρησιμοποιείστε τη συνάρτηση `GrowVariance.m` για τη μέθοδο της διασποράς και τη συνάρτηση `RSanalysis.m` για τη μέθοδο της αλλαγής κλίμακας του εύρους, που δίνονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος.
5. Για τις χρονοσειρές που δημιουργήσατε στην Άσκηση 3 υπολογίστε τον εκθέτη Hurst (και από αυτόν το φασματικό εκθέτη  $\eta$ ) με τη μέθοδο της ανάλυσης διακύμανσης και με τη μέθοδο της ανάλυσης διακύμανσης με απαλοιφή τάσης κάνοντας προσαρμογή γραμμικού πολυωνύμου και πολυωνύμου δευτέρου βαθμού.  
Βοήθεια matlab: Χρησιμοποιείστε τη συνάρτηση `DFAm.m` με κατάλληλη μεταβλητή εισόδου για κάθε μια από τις μεθόδους της άσκησης (δίνεται στην ιστοσελίδα του μαθήματος).
6. Τροποποιήστε τις συναρτήσεις του matlab για τον υπολογισμό του εκθέτη Hurst (`GrowVariance.m`, `RSanalysis.m` και `DFAm.m`) ώστε να χρησιμοποιούν παράθυρα (τιμήμα χρονοσειράς  $n$  παρατηρήσεων) με μέγεθος που δίνεται ως δύναμη του 2, δηλαδή παράθυρο μήκους 4, 8, 16, ..., ως κάποια δύναμη του 2 που είναι μικρότερη του μήκους της χρονοσειράς (ενώ η επόμενη είναι μεγαλύτερη). Στην περίπτωση που το μήκος της χρονοσειράς δεν είναι δύναμη του δύο, να επαναλαμβάνει τους υπολογισμούς με διαμέριση της χρονοσειράς σε παράθυρα στην αντίθετη κατεύθυνση (από το τέλος προς την αρχή). Σε αυτήν την περίπτωση οι μέσοι όροι να υπολογίζονται με βάση και τις δύο κατευθύνσεις.
7. Εφαρμόστε τις μεθόδους υπολογισμού του εκθέτη Hurst και του φασματικού εκθέτη  $\eta$  στη χρονοσειρά του δείκτη από το Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών (Athens Stock Exchange, ASE) την περίοδο 5/1/1986 – 13/3/2008.