# Αβεβαιότητα και σφάλμα μέτρησης

Δημήτρης Κουγιουμτζής

10 Μαΐου 2011

Συστηματικά και τυχαία σφάλματα

Διάδοση σφάλματος μέτρησης

# Εισαγωγικά

Αβεβαιότητα μέτρησης 

Παγκόσμιος Οργανισμός Μέτρων (International Organization for Standards, ISO): μεθοδολογίες για τον καθορισμό μέτρων και σταθμών και αβεβαιότητας των μετρήσεων

$$\textbf{αβεβαιότητα} \begin{cases} \text{μοντέλου / προσομοίωσης} \\ \text{μέτρησης} \end{cases}$$

Αβεβαιότητα μοντέλου: απλουστευμένο μαθηματικό μοντέλο για μια φυσική διαδικασία που περιέχει παράγοντες που δεν έχουμε συμπεριλάβει στο μοντέλο.

Υπολογιστική (αριθμητική) αβεβαιότητα: αριθμητική επίλυση μαθηματικών εξισώσεων $\Rightarrow$ αβεβαιότητα μοντέλου

Αβεβαιότητα μοντέλου:
δύσκολο να προσδιοριστεί, εύκολο να απαλειφεί.
Αβεβαιότητα μέτρησης:
εύκολο να προσδιοριστεί, δύσκολο να απαλειφεί.

Αβεβαιότητα μοντέλου: πηγάζει από ανεπάρκεια του μοντέλου λόγω έλλειψης γνώσης για τη διαδικασία που μελετάμε
**σφάλμα του μοντέλου**: αναγνωρισμένη ανεπάρκεια που δίνει το μοντέλο όταν το εφαρμόζουμε στην πράξη.

Αβεβαιότητα μέτρησης: σύνολο δυνατών τιμών για μια συγκεκριμένη μέτρηση
**σφάλμα μέτρησης**: διαφορά πραγματικής και παρατηρούμενης τιμής

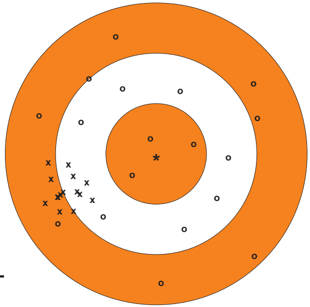
# Συστηματικά και τυχαία σφάλματα

Άλλη μέτρηση ⇒ άλλο αποτέλεσμα (πειραματικές αποκλίσεις)

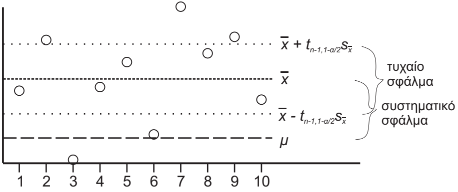
- Συστηματικά σφάλματα: επαναλαμβάνονται και υπάρχει κάποιο αίτιο που τα δημιουργεί.
  Μπορούν να εξουδετερωθούν με *βαθμονόμηση*
  Τα συστηματικά σφάλματα ορίζουν την **ακρίβεια (ορθότητα)** μέτρησης. Εκτίμηση παραμέτρων ⇒ μεροληψία.
- Τυχαία σφάλματα δεν επαναλαμβάνονται με το πείραμα αλλά αντιπροσωπεύουν την τυχαιότητα. Τα τυχαία σφάλματα ορίζουν την **ακρίβεια επανάληψης**.

(α)


(β)



# Αβεβαιότητα στην εκτίμηση της μέσης τιμής




τ.μ. $X$, $n$ μετρήσεις

Αβεβαιότητα μέτρησης = εκτίμηση του σφάλματος μέτρησης = τυπική απόκλιση $s$ Όριο της ακρίβειας επανάληψης: για κάθε (επόμενη) μέτρηση σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha$

$$\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}s$$

Αβεβαιότητα μέσης τιμής = εκτίμησης σφάλματος για μέση τιμή = σταθερό σφάλμα του μέσου όρου $s_{\bar{x}} = s/\sqrt{n}$

Όριο της ακρίβειας για τη μέση τιμή

$$\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}s/\sqrt{n}$$

# Παράδειγμα: Τάση σε αντιστάτη

Μέτρηση τάσης $V$ σε έναν αντιστάτη (σε mV)

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_i$ | 123.5 | 125.3 | 124.1 | 123.9 | 123.7 | 124.2 | 123.2 | 123.7 | 124.0 | 123.2 |

$$\bar{V} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} V_i = 123.880 \text{ mV}$$

Υπόθεση: $V \sim N(\mu, \sigma^2) \;\Rightarrow\;$ αβεβαιότητα για κάθε μέτρηση $V_i$

$$s_V = \sqrt{\frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{n}(V_i - \bar{V})^2} = 0.607 \text{ mV}.$$

$$V_1 = (123.5 \pm 0.6)\text{mV}, \;\; V_2 = (125.3 \pm 0.6)\text{mV},$$
$$\ldots, \;\; V_{10} = (123.2 \pm 0.6)\text{mV}.$$

# Παράδειγμα: Τάση σε αντιστάτη (συνέχεια)

Αβεβαιότητα για $\bar{V}$

$$s_{\bar{V}} = \frac{s_V}{\sqrt{10}} = 0.192 \text{ mV}$$

$$\bar{V} = (123.880 \pm 0.192) \text{ mV}.$$

Όριο αβεβαιότητας ($\alpha = 0.05$) για κάθε νέα μέτρηση

$$\begin{aligned} \bar{V} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} s_V &= 123.88 \pm t_{9,0.975} \cdot 0.607 \\ &= 123.88 \pm 2.2622 \cdot 0.607 \\ &= 123.88 \pm 1.373 \text{ mV}, \end{aligned}$$

Όριο αβεβαιότητας για μέση τιμή $\mu$

$$\begin{aligned} \bar{V} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} s_V/\sqrt{n} &= 123.88 \pm 2.2622 \cdot 0.607/\sqrt{10} \\ &= 123.88 \pm 0.434 \text{ mV}. \end{aligned}$$

# Διάδοση σφάλματος μέτρησης

Έστω ότι γνωρίζουμε $X$ με κάποια αβεβαιότητα $\sigma_X$.
$Y = f(X)$
Η μεταβολή του $Y$ για κάθε μικρή μεταβολή $\mathrm{d}X$ γύρω από κάποια τιμή $x$

$$\mathrm{d}Y \simeq \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}\right)_{X=x} \mathrm{d}X,$$

Έστω $\mathrm{d}X = x - \bar{x}$ και $\mathrm{d}Y = y - \bar{y}$

$$\sigma_Y^2 \simeq \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}\right)^2_{X=x} \sigma_X^2 \;\Leftrightarrow\; \sigma_Y \simeq \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}\right|_{X=x} \sigma_X$$

# Διάδοση σφάλματος μέτρησης (συνέχεια)

Αν $Y$ είναι συνάρτηση των $X_1, X_2, \ldots, X_m$

$$\sigma_Y^2 \simeq \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X_i}\right)^2_{X_i=x_i} \sigma_{X_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X_i}\right)^2_{X_i=x_i} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X_j}\right)^2_{X_j=x_j} \sigma_{X_i,X_j}$$

**νόμος διάδοσης των σφαλμάτων**

Η σχέση είναι ακριβής μόνο όταν $f$ γραμμική.

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_m$ ανεξάρτητες

$$\sigma_Y \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X_i}\right)^2_{X_i=x_i} \sigma_{X_i}^2}$$

# $f$ γραμμική

$$Y = \sum_{i=1}^{m} a_i X_i = \mathbf{a}^{\mathsf{T}} \mathbf{X}$$

$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_m]^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_m]^{\mathsf{T}}$.
Πίνακας συνδιασποράς

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2_{X_1} & \sigma_{X_1,X_2} & \cdots & \sigma_{X_1,X_m} \\ \sigma_{X_2,X_1} & \sigma^2_{X_2} & \cdots & \sigma_{X_2,X_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_m,X_1} & \sigma_{X_m,X_2} & \cdots & \sigma^2_{X_m} \end{bmatrix}.$$

# $f$ γραμμική (συνέχεια)

Η διασπορά της $Y$ είναι

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} a_i \sigma_{X_i,X_j} a_j = \mathbf{a}^\mathsf{T} \Sigma \mathbf{a}.$$

$\rho_{X_i,X_j} = \sigma_{X_i,X_j}/(\sigma_{X_i}\sigma_{X_j})$: συντελεστής συσχέτισης των $X_i$ και $X_j$

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{m} a_i \sigma_{X_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} a_i a_j \rho_{X_i,X_j} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}.$$

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_m$ ανεξάρτητες

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{m} a_i \sigma_{X_i}^2.$$

**σχετική αβεβαιότητα** : $\sigma_X/X$

# Παράδειγμα: Νόμος του Ωμ

Νόμος του Ωμ: $R = V/I$,

- $I$: ένταση ρεύματος στον αντιστάτη με αβεβαιότητα $\sigma_I$
- $V$: τάση ρεύματος στον αντιστάτη με αβεβαιότητα $\sigma_V$
- $R$: αντίσταση με αβεβαιότητα $\sigma_R$

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{I}\right)^2 + \left(\frac{V}{I^2}\sigma_I\right)^2} = R\sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2}.$$

Σχετική αβεβαιότητα $\sigma_R/R$ : τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των σχετικών αβεβαιοτήτων της έντασης και τάσης.