# Στατιστική για Πολιτικούς Μηχανικούς
# ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ - 1

Δημήτρης Κουγιουμτζής

28 Νοεμβρίου 2012

# ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ - 1

τ.μ. $X$ με κατανομή $F_X(x;\theta)$
Παράμετρος $\theta$: άγνωστη
$\theta \quad \rightarrow \quad \mu, \sigma^2, p$
Δείγμα $\{x_1, \ldots, x_n\}$: γνωστό

**Εκτίμηση παραμέτρου**

1. Σημειακή εκτίμηση: $\hat{\theta}$
2. Εκτίμηση διαστήματος: $[\theta_1, \theta_2]$

Άλλο δείγμα $\rightarrow$ άλλα δεδομένα $\{x_1, \ldots, x_n\}$

$$\Downarrow$$

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ συμβολίζουν:
1. Παρατηρήσεις
2. τ.μ. $\{X_1, \ldots, X_n\}$ με κατανομή $F_X(x;\theta)$

# Σημειακή Εκτίμηση

$\hat{\theta}$: εκτιμήτρια της $\theta$

$\hat{\theta}$ είναι συνάρτηση των τ.μ. $\{x_1, \ldots, x_n\}$

$$\Downarrow$$

$\hat{\theta}$ είναι τ.μ., $\quad \mathrm{E}(\hat{\theta}) \equiv \mu_{\hat{\theta}}, \ \mathrm{Var}(\hat{\theta}) \equiv \sigma^2_{\hat{\theta}}$

Εκτίμηση μέσης τιμής (δειγματική μέση τιμή)

$$\theta \to \mu \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Εκτίμηση διασποράς (δειγματική διασπορά)

$$\theta \to \sigma^2 \qquad \tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

# Κριτήρια καλών εκτιμητριών

## 1. Αμεροληψία

$\hat{\theta}$ αμερόληπτη: $\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \theta$
αλλιώς η μεροληψία είναι $b(\hat{\theta}) = \mathrm{E}(\hat{\theta}) - \theta$

*Παραδείγματα*

- Η δειγματική μέση τιμή $\bar{x}$ είναι αμερόληπτη: $\mathrm{E}(\bar{x}) = \mu$

$$\mathrm{E}(\bar{x}) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

- Η δειγματική διασπορά $s^2$ είναι αμερόληπτη: $\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2$ ?
- Η δειγματική διασπορά $\tilde{s}^2$ είναι μεροληπτική:

$$b(\tilde{s}^2) = \mathrm{E}(\tilde{s}^2) - \sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}$$

Ασυμπτωτικά ($n \to \infty$) η $\tilde{s}^2$ είναι αμερόληπτη

# Κριτήρια καλών εκτιμητριών (συνέχεια)

## 2. Συνέπεια

$\hat{\theta}$ συνεπής: $\mathrm{P}(|\theta - \hat{\theta}| \leq \epsilon) \to 1$ όταν $n \to \infty$

*Παραδείγματα*

- $\bar{x}$, $s^2$, $\tilde{s}^2$ είναι συνεπείς
- Η εκτιμήτρια της $\mu$: $x_d = (x_{\min} + x_{\max})/2$ δεν είναι συνεπής

## Θέμα 5

Συνέπεια και ο νόμος των μεγάλων αριθμών

## 3. Αποτελεσματικότητα

Δύο εκτιμήτριες $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ της $\theta$:
$\hat{\theta}_1$ είναι πιο αποτελεσματική από $\hat{\theta}_2$ όταν $\sigma^2_{\hat{\theta}_1} < \sigma^2_{\hat{\theta}_2}$

*Παράδειγμα*

- $\bar{x}$ είναι πιό αποτελεσματική από τη $x_d$ γιατί $\sigma^2_{\bar{x}} < \sigma^2_{x_d}$.

# Κριτήρια καλών εκτιμητριών (συνέχεια)

## 4. Επάρκεια

$\hat{\theta}$ είναι επαρκής όταν χρησιμοποιεί όλη την πληροφορία από το δείγμα που σχετίζεται με τη $\theta$.

*Παραδείγματα*

• $\bar{x}$, $s^2$, $\tilde{s}^2$ είναι επαρκείς γιατί χρησιμοποιούν όλες τις παρατηρήσεις $\{x_1, \ldots, x_n\}$

• $x_d$ δεν είναι επαρκής γιατί χρησιμοποιεί μόνο $x_{\min}$ και $x_{\max}$.

## Παρατηρήσεις

- Μια καλή εκτιμήτρια πρέπει να πληρεί αυτές τις ιδιότητες.
- Βέλτιστη εκτιμήτρια: αμερόληπτη και με ελάχιστη διασπορά

## Θέμα 6

Εξισορρόπηση μεροληψίας και διασποράς εκτίμησης: το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (mean square error).

# Υπολογισμός σημειακής εκτίμησης

Θέλουμε να εκτιμήσουμε τη $\theta$ παράμετρο κατανομής $F(x;\theta)$ μιας τ.μ. $X$ από τα ανεξάρτητα δεδομένα $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

## Μέθοδος των Ροπών

1. Εκτιμούμε πρώτα τις ροπές της κατανομής:
   - ροπή πρώτου βαθμού: $\mu \quad \leftarrow \bar{x}$
   - ροπή δευτέρου βαθμού: $\sigma^2 \quad \leftarrow s^2$
2. Από τη σχέση της $\theta$ με τις ροπές υπολογίζουμε την εκτίμηση $\hat{\theta}$.

*Παραδείγματα*

• Κανονική κατανομή: παράμετροι $\mu$ και $\sigma^2$ είναι οι ίδιες ροπές (άμεση εκτίμηση).

• Ομοιόμορφη κατανομή στο $[a, b]$: παράμετροι $a$ και $b$ υπολογίζονται από $\mu = \frac{a+b}{2}$ και $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ (έμμεση εκτίμηση).

# Παράδειγμα: Μετρήσεις αντοχής θραύσης σκυροδέματος

| Α/Α | $x_i$ (ksi) | $x_i^2$ |
|---|---|---|
| 1 | 5.3 | 28.1 |
| 2 | 4.5 | 20.2 |
| 3 | 5.7 | 32.5 |
| 4 | 5.8 | 33.6 |
| 5 | 4.8 | 23.0 |
| 6 | 6.4 | 41.0 |
| 7 | 6.4 | 41.0 |
| 8 | 5.6 | 31.4 |
| 9 | 5.8 | 33.6 |
| 10 | 5.7 | 32.5 |
| 11 | 5.5 | 30.2 |
| 12 | 6.1 | 37.2 |
| 13 | 5.2 | 27.0 |
| 14 | 7.0 | 49.0 |
| 15 | 5.5 | 30.2 |
| 16 | 5.7 | 32.5 |
| 17 | 6.3 | 39.7 |
| 18 | 5.6 | 31.4 |
| 19 | 5.5 | 30.2 |
| 20 | 5.0 | 25.0 |
| 21 | 5.8 | 33.6 |
| 22 | 4.7 | 22.1 |
| 23 | 6.1 | 37.2 |
| 24 | 6.7 | 44.9 |
| 25 | 5.1 | 26.0 |
| Σύνολο | 141.8 | 813.3 |

Υποθέτουμε κανονική κατανομή:
παράμετροι $\mu$ και $\sigma^2$
Εκτίμηση μέσης τιμής:

$$\bar{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i = \frac{1}{25}141.8 = 5.67$$

Για $s^2$, υπολογίζουμε πρώτα το άθροισμα τετραγώνων

$$\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 813.3$$

Εκτίμηση διασποράς:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{25-1}\left(\sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 25\cdot\bar{x}^2\right) \\ &= \frac{1}{24}(813.3 - 25\cdot 5.67^2) = 0.375 \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ομοιόμορφη κατανομή στο $[a, b]$:
παράμετροι $a$ και $b$
Εκτίμηση των $a$ και $b$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \tfrac{a+b}{2} \\ s^2 &= \tfrac{(b-a)^2}{12} \end{aligned} \quad\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \bar{x} - \sqrt{3}s \\ \hat{b} &= \bar{x} + \sqrt{3}s \end{aligned} \quad\Rightarrow$$

$$\hat{a} = 4.61$$
$$\hat{b} = 6.73$$

# Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας

Δίνονται ανεξάρτητα $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_i \sim F(x;\theta)$
$\rightarrow$ ποια είναι η πιο πιθανή τιμή για τη $\theta$;
$f(x_i;\theta)$ ή $\mathrm{P}(X = x_i;\theta)$ για κάποια τιμή $X = x_i$
Συνάρτηση πιθανοφάνειας (πιθανότητα να παρατηρήσουμε $\{x_1, \ldots, x_n\}$ σ΄ ένα τυχαίο δείγμα)

$$L(x_1, \ldots, x_n;\theta) = f(x_1;\theta) \cdots f(x_n;\theta)$$

Άν $L(x_1, \ldots, x_n;\theta_1) > L(x_1, \ldots, x_n;\theta_2)$ τότε $\theta_1$ πιο αληθοφανής από $\theta_2$
Η 'πιό αληθοφανήσ' τιμή της $\theta$: αυτή που μεγιστοποιεί τη $L(x_1, \ldots, x_n;\theta)$ ή $\log L(x_1, \ldots, x_n;\theta)$.
Εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\theta}$ δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{\partial \log L(x_1, \ldots, x_n;\theta)}{\partial \theta} = 0.$$

# Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας (συνέχεια)

Θέλουμε να εκτιμήσουμε $\theta_1, \ldots, \theta_m$
Συνάρτηση πιθανόφανειας: $L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_m)$
Εκτιμήτριες μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_m$ δίνονται από

$$\frac{\partial \log L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_m)}{\partial \theta_j} = 0 \qquad j = 1, \ldots, m.$$

## Παρατηρήσεις

- Η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας μπορεί να εφαρμοσθεί για οποιοδήποτε $\theta$ αν ξέρουμε την κατανομή $F_X(x; \theta)$.
- Η μέθοδος των ροπών δεν εφαρμόζεται αν η $\theta$ δε μπορεί να υπολογισθεί από τις ροπές.
- Η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας είναι αμερόληπτη (ασυμπτωτικά), συνεπής, αποτελεσματική κι επαρκής.

# Εκτίμηση παραμέτρων κανονικής κατανομής

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ από κανονική κατανομή $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ και $\sigma^2$ γνωστή

$$f_X(x;\mu) \equiv f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$ εκτίμηση του $\mu$;

συνάρτηση πιθανόφανειας

$$L(x_1, \ldots, x_n; \mu) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]$$

$$\log L(x_1, \ldots, x_n; \mu) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

Εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\mu}$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

# Εκτίμηση παραμέτρων κανονικής κατανομής (συνέχεια)

Και η διασπορά $\sigma^2$ άγνωστη

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$$

Η επίλυση δίνει για $\mu$, $\hat{\mu} = \bar{x}$, και για $\sigma^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \tilde{s}^2$$

# Εκτίμηση Διαστήματος εμπιστοσύνης

Μελετήσαμε την εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ παραμέτρου $\theta$:
Αν γνωρίζουμε την κατανομή της $X$ και είναι $F_X(x;\theta)$, τότε βρίσκουμε τη $\hat{\theta}$ με

1. Μέθοδο ροπών
2. Μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας

Ανεξάρτητα από την κατανομή της $X$ έχουμε τους εκτιμητές:

$$\begin{aligned} \theta := \mu \quad &\rightarrow \quad \hat{\theta} = \bar{x} \\ \theta := \sigma^2 \quad &\rightarrow \quad \hat{\theta} = s^2 \quad \text{ή} \quad \hat{\theta} = \tilde{s}^2 \end{aligned}$$

Η τιμή της εκτιμήτριας $\hat{\theta}$ εξαρτάται από το δείγμα $\{x_1, \ldots, x_n\}$.
$\hat{\theta}$ **είναι τ.μ.** με $\mathrm{E}(\hat{\theta}) \equiv \mu_{\hat{\theta}}$, $\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \equiv \sigma^2_{\hat{\theta}}$

Κατανομή της $\hat{\theta}$ ? $\quad$ $\mathrm{E}(\hat{\theta})$ ? $\quad$ $\mathrm{Var}(\hat{\theta})$ ?

Με βάση την κατανομή της $\hat{\theta}$ θέλουμε να ορίσουμε ένα διάστημα $[\theta_1, \theta_2]$ που θα περιέχει με κάποια πιθανότητα την πραγματική τιμή της $\theta$.

# Διάστημα εμπιστοσύνης της $\mu$

Εκτιμήτρια (σημειακή εκτίμηση) της $\mu$: $\bar{x}$

$$\begin{aligned}
\mu_{\bar{x}} &= \mathrm{E}(\hat{\mu}) = \mu \\
\sigma^2_{\bar{x}} &= \mathrm{Var}(\bar{x}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(x_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 \\
&= \frac{1}{n^2}(n\cdot\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n} \\
\sigma_{\bar{x}} &= \sigma/\sqrt{n} \quad \text{σταθερό σφάλμα}
\end{aligned}$$

Η κατανομή της $\bar{x}$ εξαρτάται από

1. τη διασπορά της $X$, $\sigma^2$ (γνωστή / άγνωστη)
2. την κατανομή της $X$ (κανονική ή όχι)
3. μέγεθος του δείγματος $n$ (μεγάλο / μικρό)

# Διάστημα εμπιστοσύνης της $\mu$ - γνωστή διασπορά $\sigma^2$

Για την κατανομή της $\bar{x}$ έχουμε δύο περιπτώσεις

$$\boxed{1}\, X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \;\vee\; \boxed{2}\, n > 30 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$$

$$X \nsim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \;\wedge\; n < 30 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \sim \quad ?$$

## $\boxed{1}$ Αν η κατανομή της $X$ είναι κανονική

$\Downarrow$

κατανομή της $X_1 + \ldots + X_n$ είναι κανονική

$\Downarrow$

η κατανομή της $\bar{x}$ είναι κανονική

## $\boxed{2}$ Αν το δείγμα είναι μεγάλο $n > 30$

$\Downarrow$ Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

η κατανομή της $\bar{x}$ είναι κανονική

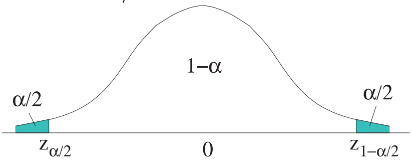
**Θέμα 7**

Αν ρίξουμε πολλά νομίσματα ο συνολικός αριθμός των κεφαλών θα ακολουθεί κανονική κατανομή

# γνωστό $\sigma^2$ και $\bar{x}$ ακολουθεί κανονική κατανομή

$\bar{x} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n) \quad \Rightarrow \quad z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$

Για κάθε πιθανότητα $\alpha$ (και $1-\alpha$) υπάρχουν οι αντίστοιχες τιμές της $z$, $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$:




$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P}(z < z_{\alpha/2}) = \Phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2 \\ \mathrm{P}(z > z_{1-\alpha/2}) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha/2}) = 1 - (1-\alpha/2) = \alpha/2 \end{array}\right\}$$

$\mathrm{P}(z < z_{\alpha/2} \;\vee\; z > z_{1-\alpha/2}) = \alpha \quad \Rightarrow$

$\mathrm{P}(z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}) = \Phi(z_{1-\alpha/2}) - \Phi(z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$

**Από τον στατιστικό πίνακα τυπικής κανονικής κατανομής**

Δίνεται πιθανότητα $1-\alpha \Rightarrow$ κρίσιμη τιμή $z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$

# γνωστό $\sigma^2$, $\bar{x}$ ακολουθεί κανονική κατανομή (συνέχεια)

η $z$ ανήκει στο διάστημα $[z_{\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}] = [-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$ με πιθανότητα $1-\alpha$.

Από το μετασχηματισμό $z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ έχουμε για τα άκρα του διαστήματος $[-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$

$$-z_{1-\alpha/2} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad z_{1-\alpha/2} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Λύνουμε ως προς $\mu$

$$\mu = \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \mu = \bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

**Διάστημα εμπιστοσύνης της $\mu$ σε επίπεδο εμπιστοσύνης $1-\alpha$**

$$\left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

# γνωστό $\sigma^2$, $\bar{x}$ ακολουθεί κανονική κατανομή (συνέχεια)

## Ερμηνεία διαστήματος εμπιστοσύνης

- 'με πιθανότητα (εμπιστοσύνη) $1-\alpha$ η μέση τιμή $\mu$ βρίσκεται μέσα σ' αυτό το διάστημα'
  **ΟΧΙ**
- 'αν χρησιμοποιούσαμε πολλά τέτοια διαστήματα από διαφορετικά δείγματα, ποσοστό $(1-\alpha)\%$ από αυτά θα περιείχαν τη $\mu$'
  **ΝΑΙ**

  ή

  'με $1-\alpha$ πιθανότητα (εμπιστοσύνη) το διάστημα αυτό θα περιέχει την πραγματική $\mu$'
  **ΝΑΙ**

# γνωστό $\sigma^2$, $\bar{x}$ ακολουθεί κανονική κατανομή (συνέχεια)

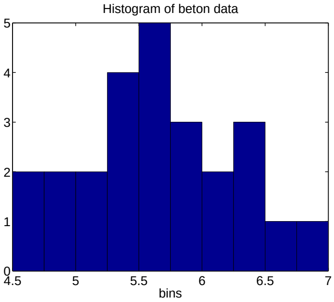
**Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του $\mu$**

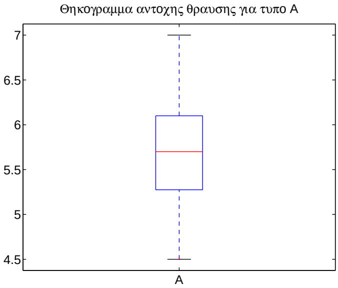
1. Επιλογή του $1-\alpha$, $\sigma$ γνωστό, $\bar{x}$ από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμης τιμής $z_{1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για τυπική κανονική κατανομή.
3. Αντικατάσταση στον τύπο $\left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

# Παράδειγμα

Διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 95% για τη μέση αντοχή θραύσης σκυροδέματος τύπου Α;

Δίνεται $\sigma^2 = 0.38\,(\text{ksi})^2$




συμμετρία, όχι μακριές ουρές, όχι ακραία σημεία

$$\Downarrow$$

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, 0.38) \qquad \mu = ?$$

# Παράδειγμα (συνέχεια)

$X \sim \mathrm{N}(\mu, 0.38) \Rightarrow \bar{x} \sim \mathrm{N}(\mu, 0.38/25)$

$$\bar{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i = \frac{141.8}{25} = 5.67\text{ksi}$$

## Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του $\mu$

1. $1 - \alpha = 0.95, \quad \sigma = \sqrt{0.38}, \quad \bar{x} = 5.67.$
2. Κρίσιμη τιμή: $z_{0.975} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96.$
3. $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad 5.67 \pm 1.96\frac{\sqrt{0.38}}{5} \quad \rightarrow \quad [5.43,\ 5.91]$

Συμπέρασμα:
Σε 95% επίπεδο εμπιστοσύνης περιμένουμε η μέση αντοχή θραύσης του σκυροδέματος τύπου A να κυμαίνεται μεταξύ 5.43 ksi και 5.91 ksi

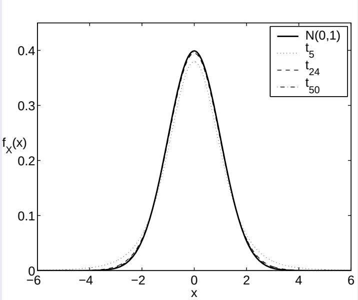
# Διάστημα εμπιστοσύνης της $\mu$, άγνωστη διασπορά $\sigma^2$

## *Περίπτωση 1*: μεγάλο δείγμα ($n > 30$)

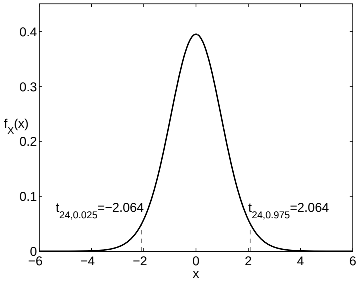
$s^2 \quad \rightarrow \quad \sigma^2 : \qquad \left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \;\; \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

## *Περίπτωση 2*: μικρό δείγμα ($n < 30$) και $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Τότε ισχύει $t \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$
κατανομή student με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας



# Άγνωστη διασπορά $\sigma^2$




## Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του $\mu$

1. Επιλογή του $1-\alpha$, $\sigma$ άγνωστο, $\bar{x}$ και $s$ από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμης τιμής $t_{n-1,\,1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για κατανομή student.
3. Αντικατάσταση στον τύπο
$$\left[\bar{x} - t_{n-1,1-\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}},\ \ \bar{x} + t_{n-1,1-\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

# Άγνωστη διασπορά $\sigma^2$

*Περίπτωση 3*: μικρό δείγμα ($n < 30$) και $X \nsim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Μη-παραμετρική μέθοδος

**Θέμα 8**

Μη-παραμετρική μέθοδος: διάστημα εμπιστοσύνης για τη διάμεσο (Wilcoxon)

**Θέμα 9**

Μη-παραμετρική μέθοδος: διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή με τη μέθοδο bootstrap

# Παράδειγμα

Διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 95% για τη μέση αντοχή θραύσης σκυροδέματος τύπου A; $[\sigma^2$ άγνωστο$]$

Μικρό δείγμα ($n < 30$) και $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

$t \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$, βαθμοί ελευθερίας: $n-1 = 24$

$$s^2 = \frac{1}{24}\left(\sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 25 \cdot (5.67)^2\right) = \frac{1}{24}(813.3{-}804.3) = 0.375\,(\mathrm{ksi})^2$$

**Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του $\mu$**

1. $1-\alpha = 0.95, \quad \bar{x} = 5.67, \quad s^2 = 0.375.$
2. Κρίσιμη τιμή: $t_{24,0.975} = 2.064$.
3. $\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}} \;\to\; 5.67 \pm 2.064\frac{\sqrt{0.375}}{5} \;\to\; [5.42,\ 5.92]$

Αν $z_{0.975} = 1.96$ αντί $t_{24,\,0.975} = 2.064$

$5.67 \pm 1.96\frac{\sqrt{0.375}}{5} \quad \to \quad [5.52, 5.82]$

# Εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης της $\mu$

| διασπορά | $X$-κατανομή | $n$ | $\bar{x}$-κατανομή | δ.ε. |
|---|---|---|---|---|
| γνωστή | κανονική | | $z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$ | $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ |
| γνωστή | μη κανονική | μεγάλο | $z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$ | $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ |
| γνωστή | μη κανονική | μικρό | — | — |
| άγνωστη | | μεγάλο | $z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$ | $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$ |
| άγνωστη | κανονική | μικρό | $t \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$ | $\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$ |
| άγνωστη | μη κανονική | μικρό | — | — |

Γενικά για το δ.ε. της $\mu$ βρίσκεται από

$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ή $\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$

# Εύρος διαστήματος εμπιστοσύνης)

Το διάστημα εμπιστοσύνης εξαρτάται από:

- την κατανομή και τη $\sigma^2$ της τ.μ. $X$
- το μέγεθος $n$ του δείγματος
- το επίπεδο εμπιστοσύνης $1-\alpha$

Για δεδομένο εύρος διαστήματος εμπιστοσύνης μπορούμε να βρούμε το μέγεθος $n$ που αντιστοιχεί από τον αντίστοιχο τύπο.

**Ενδεικτική περίπτωση: $n < 30$, $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ και $\sigma^2$ άγνωστο**

εύρος του δ.ε. $w = 2t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

Για εύρος $w$ πρέπει το δείγμα να έχει μέγεθος

$$n = \left(2t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{w}\right)^2 \quad \textbf{ή} \quad n = \left(2z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{w}\right)^2$$

ανάλογα με το $n$ που βρίσκουμε.

# Παράδειγμα

Στο προηγούμενο αριθμητικό παράδειγμα (αντοχή θραύσης), χρησιμοποιώντας $t$-κατανομή βρήκαμε 95% δ.ε.

$5.67 \pm 2.064\frac{\sqrt{0.375}}{5} \quad \longrightarrow \quad [5.42, 5.92]$

Εύρος δ.ε.: $\quad 2 \cdot 2.064\frac{\sqrt{0.375}}{5} = 0.50$ ή ισοδύναμα

ακρίβεια γύρω από τη $\bar{x}$ : $\quad 2.064\frac{\sqrt{0.375}}{5} = 0.25$

Αν θέλουμε εύρος 0.20 (ή ακρίβεια 0.10), πόσο πρέπει να μεγαλώσει το δείγμα;

(κανονική κατανομή) $n = \left(2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sqrt{0.375}}{0.25}\right)^2 = 92.2 \simeq 93$

(κατανομή student)

$$t_{24,0.975} = 2.064 \quad \rightarrow \quad n = \left(2 \cdot 2.064 \cdot \frac{\sqrt{0.375}}{0.25}\right)^2 = 102.2 \simeq 102$$

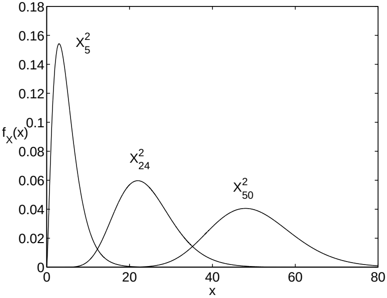
$$t_{101,0.975} = 1.984 \quad \rightarrow \quad n = \left(2 \cdot 1.984 \cdot \frac{\sqrt{0.375}}{0.25}\right)^2 = 94.5 \simeq 95$$

$$t_{94,0.975} = 1.985 \quad \rightarrow \quad n = \left(2 \cdot 1.985 \cdot \frac{\sqrt{0.375}}{0.25}\right)^2 = 94.6 \simeq 95$$

# Διάστημα εμπιστοσύνης της $\sigma^2$

$s^2$ εκτιμήτρια της $\sigma^2$

Δίνεται $\chi^2 \equiv \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{n-1}$

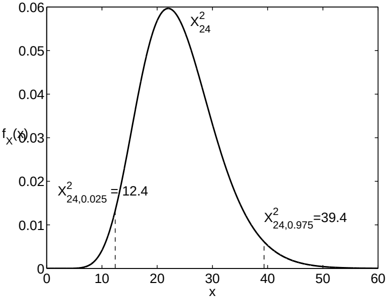



- Για πολύ μεγάλο $n$: $\mathcal{X}^2_{n-1} \quad \rightarrow \quad$ κανονική
- $\mathcal{X}^2_{n-1}$ δεν είναι συμμετρική κατανομή
- δύο κρίσιμες τιμές:

  $\chi^2_{n-1,\alpha/2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{P}(\chi^2 < \chi^2_{n-1,\alpha/2}) = \alpha/2$

  $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{P}(\chi^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$

# Διάστημα εμπιστοσύνης της $\sigma^2$ (συνέχεια)




$$\mathrm{P}\left(\chi^2_{n-1,\alpha/2} < \chi^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{P}\left(\chi^2_{n-1,\alpha/2} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

# Διάστημα εμπιστοσύνης της $\sigma^2$ (συνέχεια)

## Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του $\sigma^2$

1. Επιλογή του $1-\alpha$, $s^2$ από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμων τιμών $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ και $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για κατανομή $\mathcal{X}^2_{n-1}$.
3. Αντικατάσταση στον τύπο $\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right]$

## Διάστημα εμπιστοσύνης της τυπικής απόκλισης $\sigma$

Το 95% δ.ε. για την τυπική απόκλιση $\sigma$ έχει ως άκρα τις τετραγωνικές ρίζες των αντίστοιχων άκρων του 95% δ.ε. για τη διασπορά $\sigma^2$.

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}}\right]$$

# Παράδειγμα

Διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 95% για τη διασπορά αντοχής θραύσης σκυροδέματος τύπου Α;

$\chi^2 \equiv \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{n-1}$, βαθμοί ελευθερίας: $n-1=24$

$s^2 = 0.375\,(\text{ksi})^2$

**Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του $\sigma^2$**

1. $1-\alpha = 0.95, \quad s^2 = 0.375.$
2. Κρίσιμες τιμές: $\chi^2_{24,0.025} = 12.4$ και $\chi^2_{24,0.975} = 39.4$.
3. $\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right] = \left[\frac{24\cdot 0.375}{39.4}, \frac{24\cdot 0.375}{12.4}\right] = [0.228, 0.726]$

Το 95% δ.ε. για την τυπική απόκλιση $\sigma$ της αντοχής θραύσης σκυροδέματος είναι $[\sqrt{0.228}, \sqrt{0.726}] = [0.478, 0.852]$.

# Διάστημα εμπιστοσύνης της αναλογίας $p$

**αναλογία** $p = \frac{M}{N}$
$M$: στοιχεία του πληθυσμού που πληρούν μια ιδιότητα (‘επιτυχία’)
$N$: σύνολο όλων των στοιχείων του πληθυσμού

Δείγμα μεγέθους $n$ και $m$ ‘επιτυχίες’
Εκτιμήτρια της $p$ : $\hat{p} = \frac{m}{n}$

$$\text{Για μεγάλο } n\text{: } \hat{p} \sim \mathrm{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$z \equiv \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$
$$\text{διάστημα} \Downarrow \text{εμπιστοσύνης}$$
$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$
$$\Downarrow \quad p \quad \rightarrow \quad \hat{p} \quad \Downarrow$$
$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

## Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του $p$

1. Επιλογή του $1-\alpha$, $\hat{p}$ από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμης τιμής $z_{1-\alpha/2}$ από τον πίνακα τυπικής κανονικής κατανομής.
3. Αντικατάσταση στον τύπο
$$\left[\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\;\; \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

## Εύρος διαστήματος εμπιστοσύνης

Εύρος δ.ε. της $p$: $\quad w = 2z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$\Longrightarrow \quad n = \left(\frac{2z_{1-\alpha/2}}{w}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p})$ $\quad$ αλλά $p$ άγνωστο!

Μπορεί να δειχθεί ότι: $\quad \max \hat{p}(1-\hat{p}) = 0.25$

$\Longrightarrow \quad n = \left(\frac{2z_{1-\alpha/2}}{w}\right)^2 0.25 = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{w}\right)^2$

# Παράδειγμα

95% διάστημα εμπιστοσύνης για την αναλογία σκουριασμένων ραβδών χάλυβα μιας αποθήκης;

Δείγμα από $n = 100$ ράβδους και $m = 12$ σκουριασμένες.

Σημειακή εκτίμηση: $\hat{p} = \frac{12}{100} = 0.12$.

**Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του $p$**

1. $1 - \alpha = 0.95, \quad \hat{p} = 0.12$.
2. Κρίσιμη τιμή: $z_{0.975} = 1.96$.
3. $\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad \rightarrow \quad 0.12 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.12\cdot(1-0.12)}{100}} \quad \rightarrow$ $[0.056, 0.184]$

Μέγιστο $n$ του δείγματος για $w = 0.05$;
$n = \left(\frac{1.96}{0.05}\right)^2 = 1536.6 \simeq 1537$

## Θέμα 10

Διάστημα εμπιστοσύνης και εκτίμηση μεγέθους δείγματος για αναλογία σε πεπερασμένο πληθυσμό

# Άσκηση

Έγιναν 15 μετρήσεις της συγκέντρωσης διαλυμένου οξυγόνου (Δ.Ο.) σε ένα ποτάμι (σε $mg/l$)

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.8 | 2.0 | 2.1 | 1.7 | 1.2 | 2.3 | 2.5 | 2.9 | 1.6 | 2.2 | 2.3 | 1.8 | 2.4 | 1.6 | 1.9 |

Από παλιότερες μετρήσεις γνωρίζουμε ότι η διασπορά του Δ.Ο. είναι $0.1\,(mg/l)^2$.

1. Εκτιμείστε τη διασπορά της συγκέντρωσης Δ.Ο. από το δείγμα καθώς και τα διαστήματα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 99% και 90%. Εξετάστε και για τα δύο επίπεδα εμπιστοσύνης αν μπορούμε να δεχτούμε την εμπειρική τιμή της διασποράς γι αυτό το δείγμα.
2. Εκτιμείστε τη μέση συγκέντρωση Δ.Ο. από το δείγμα και δώστε γι αυτήν 95% διάστημα εμπιστοσύνης
υποθέτοντας πρώτα ότι η διασπορά είναι γνωστή και μετά χρησιμοποιώντας αυτήν του δείγματος.
3. Αν υποθέσουμε ότι για ένα εργοστάσιο δίπλα στο ποτάμι είναι σημαντικό η μέση συγκέντρωση Δ.Ο. να μην πέφτει κάτω από $1.8\,mg/l$, θα προκαλούσαν ανησυχία αυτές οι παρατηρήσεις (διασπορά από το δείγμα);

# Άσκηση (συνέχεια)

4. Αν δε μας ικανοποιεί το εύρος του τελευταίου παραπάνω διαστήματος και θέλουμε να το μειώσουμε σε $0.2\, mg/l$ πόσες επιπρόσθετες ημερήσιες μετρήσεις πρέπει να γίνουν;
5. Ένας άλλος τρόπος να ελέγξουμε αν η συγκέντρωση του Δ.Ο. πέφτει σε μη επιθυμητά επίπεδα είναι να δούμε αν το ποσοστό των ημερών που η τιμή της συγκέντρωσης Δ.Ο. πέφτει στο επίπεδο $1.6\, mg/l$ και κάτω ξεπερνάει το 15%. Εκτιμείστε αυτό το ποσοστό από το δείγμα. Μπορείτε να δώσετε 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό; Πόσο πρέπει να είναι το μέγεθος του δείγματος για να μπορεί να εκτιμηθεί 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό με πλάτος το πολύ 10%;