

# Στατιστική για Χημικούς Μηχανικούς ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Δημήτρης Κουγιουμτζής

17 Μαΐου 2013

## Έλεγχος Υποθέσεων

- 1 Στατιστική υπόθεση
- 2 Στατιστική ελέγχου και περιοχή απόρριψης
- 3 Απόφαση ελέγχου

### Στατιστική υπόθεση

μηδενική υπόθεση  $H_0: \theta = \theta_0$

εναλλακτική υπόθεση  $H_1$ :

- 1  $H_1: \theta \neq \theta_0$ , δίπλευρος έλεγχος
- 2  $H_1: \theta < \theta_0$ , μονόπλευρος έλεγχος  
Σύνολο δυνατών τιμών της  $\theta$ :  $\theta_0$  και  $< \theta_0$   
Σωστότερα  $H_0: \theta \geq \theta_0$  και  $H_1: \theta < \theta_0$
- 3  $H_1: \theta > \theta_0$ , όπως (2)

## Στατιστική ελέγχου, περιοχή απόρριψης

Δυνατές τιμές της  $\theta$  χωρίζονται:

- Περιοχή αποδοχής της  $H_0$
- Περιοχή απόρριψης  $R$  της  $H_0$

Επίπεδο εμπιστοσύνης  $(1 - \alpha)$  για την απόφαση ελέγχου  
 $\alpha$ : επίπεδο σημαντικότητας

Η περιοχή αποδοχής και απόρριψης αλλάζει με το  $\alpha$

Κατανομή για την εκτιμήτρια  $\hat{\theta}$  της  $\theta$ ;

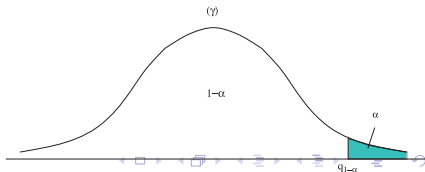
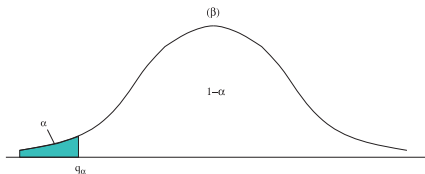
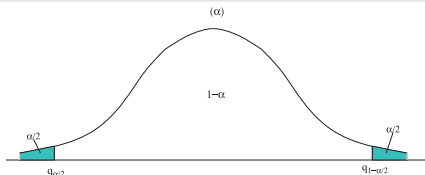
- παραμετρικός έλεγχος: υποθέτουμε κατανομή για  $\hat{\theta}$
- μή-παραμετρικός έλεγχος: δεν υποθέτουμε κατανομή για  $\hat{\theta}$

## Παραμετρικός έλεγχος

$\hat{\theta} \rightarrow q$  στατιστική έλεγχου

$q$  έχει γνωστή κατανομή  
(είναι  $z$ ,  $t$  ή  $\chi^2$ )

$\alpha \rightarrow$   
κρίσιμη(ες) τιμή(ές) της  $q \rightarrow$   
 $R$



## Απόφαση ελέγχου

Υπολογίζουμε από το δείγμα  $\hat{\theta} \longrightarrow \tilde{q}$

$\tilde{q} \in R \rightarrow$  απόρριψη της  $H_0$

$\tilde{q} \notin R \rightarrow$  μη απόρριψη της  $H_0$

**$p$ -τιμή** του ελέγχου

Για  $\tilde{q}$  (γνωστή κατανομή της  $q$  όταν ισχύει η  $H_0$ )

①  $p = P(q < -|\tilde{q}| \vee q > |\tilde{q}|)$

②  $p = P(q < \tilde{q})$

③  $p = P(q > \tilde{q})$

Η  $p$ -τιμή δηλώνει το μικρότερο επίπεδο σημαντικότητας για το οποίο μπορούμε να απορρίψουμε την  $H_0$  με βάση το δείγμα.

## Διαδικασία στατιστικού ελέγχου

- 1 Επιλογή επιπέδου σημαντικότητας  $\alpha$
- 2 Καθορισμός στατιστικής ελέγχου  $q$
- 3 Υπολογισμός κρίσιμης (-ων) τιμής (-ών) της  $q$  από τον αντίστοιχο στατιστικό πίνακα και καθορισμός της περιοχής απόρριψης  $R$
- 4 Υπολογισμός της στατιστικής ελέγχου  $\tilde{q}$  από το δείγμα
- 5 Απόρριψη της  $H_0$  αν  $\tilde{q}$  ανήκει στην  $R$ .  
Μη απόρριψη της  $H_0$  αν  $\tilde{q}$  δεν ανήκει στην  $R$ .

## Διαδικασία στατιστικού ελέγχου

Γενικά όταν  $\theta$  είναι  $\mu, \rho, \mu_1 - \mu_2, \rho_1 - \rho_2$ :

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$\text{Στατιστική ελέγχου: } q = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}}$$

Κατανομή της  $q$ :  $\begin{cases} \text{Τυπική κανονική } N(0, 1) \\ \text{student με } \nu \text{ βαθμούς ελευθερίας } t_{\nu} \end{cases}$

Περιοχή απόρριψης (επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$ ):

- 1  $H_1 : \theta \neq \theta_0 : R = \{q \mid q < q_{\alpha/2} \vee q > q_{1-\alpha/2}\}$
- 2  $H_1 : \theta < \theta_0 : R = \{q \mid q < q_{\alpha}\}$
- 3  $H_1 : \theta > \theta_0 : R = \{q \mid q > q_{1-\alpha}\}$

## Διαδικασία στατιστικού ελέγχου (συνέχεια)

Δειγματική στατιστική ελέγχου:  $\tilde{q} = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}}$

$\tilde{q} \in R \rightarrow$  απόρριψη της  $H_0$

$\tilde{q} \notin R \rightarrow$  μη απόρριψη της  $H_0$

*p*-τιμή:

①  $p = P(q < \tilde{q} \vee q > \tilde{q})$

②  $p = P(q < \tilde{q})$

③  $p = P(q > \tilde{q})$



## Παράδειγμα: Έλεγχος μέσης τιμής, γνωστό $\sigma^2$

Θέλουμε να ελέγξουμε σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha = 0.05$  αν το μέσο ποσοστό του πορώδους ηλίου  $\mu$  στο γαιάνθρακα από το κοίτασμα A είναι 6.

Η διασπορά είναι γνωστή,  $\sigma^2 = 0.4$ .

$H_0 : \mu = 6$  και  $H_1 : \mu \neq 6$  [δίπλευρος έλεγχος]

$\sigma^2$  γνωστή,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$q = z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Κρίσιμη τιμή:  $z_{0.975} = 1.96 \Rightarrow R = \{z \mid |z| > 1.96\}$

## Παράδειγμα: Έλεγχος μέσης τιμής, γνωστό $\sigma^2$ (συνέχεια)

Στατιστική ελέγχου από το δείγμα ( $\bar{x} = 5.67$ ,  $n = 25$ )

$$\tilde{z} = \frac{5.67 - 6}{\sqrt{0.4/25}} = -2.61$$

$\tilde{z} \in R \rightarrow$  απόρριψη της  $H_0$  για  $\alpha = 0.05$

$p$ -τιμή για  $\tilde{z} = -2.61$

$$\begin{aligned} p &= 2(1 - P(z < |\tilde{z}|)) \\ &= 2(1 - \Phi(|\tilde{z}|)) \\ &= 2(1 - \Phi(2.61)) \\ &= 2(1 - 0.9955) = 0.009 \end{aligned}$$

## Παράδειγμα: Έλεγχος μέσης τιμής, άγνωστο $\sigma^2$

Άγνωστη διασπορά του πορώδους ηλίου του γαιάνθρακα.

$H_0 : \mu = 6$  και  $H_1 : \mu \neq 6$  [δίπλευρος έλεγχος]

$\sigma^2$  άγνωστο,  $n = 25 < 30$ ,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$q = t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Κρίσιμη τιμή:  $t_{24,0.975} = 2.06$

Περιοχή απόρριψης της  $H_0$ ,  $R = \{t \mid |t| > 2.06\}$

## Παράδειγμα: Έλεγχος μέσης τιμής, άγνωστο $\sigma^2$ (συνέχεια)

Στατιστική ελέγχου από το δείγμα  
( $\bar{x} = 5.67$ ,  $n = 25$ ,  $s^2 = 0.375$ )

$$\tilde{t} = \frac{5.67 - 6}{\sqrt{0.375/25}} = -2.69$$

$\tilde{t} \in R \rightarrow$  απόρριψη της  $H_0$  για  $\alpha = 0.05$ .

Διάστημα εμπιστοσύνης [5.42, 5.92]

$p$ -τιμή για  $\tilde{t} = -2.69$

$$\begin{aligned} p &= 2(1 - P(t \leq |\tilde{t}|)) \\ &= 2(1 - P(t \leq 2.69)) = 2(1 - 0.994) = 0.012 \end{aligned}$$

## Έλεγχος υπόθεσης $H_0 : \mu = \mu_0$ στις διάφορες περιπτώσεις

διασπορά	κατανομή της $X$	$n$	κατανομή στατιστικής $q$
γνωστή	κανονική		$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$
γνωστή	μη κανονική	μεγάλο	$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$
γνωστή	μη κανονική	μικρό	—
άγνωστη		μεγάλο	$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$
άγνωστη	κανονική	μικρό	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$
άγνωστη	μη κανονική	μικρό	—

## Παράδειγμα: Έλεγχος διασποράς

Θέλουμε να ελέγξουμε αν θα μπορούσαμε να πούμε με μεγάλη σιγουριά (επίπεδο εμπιστοσύνης 99%) πως η τυπική απόκλιση  $\sigma$  του πορώδους ηλίου στο γαιάνθρακα του κοιτάσματος μπορεί να ξεπεράσει το επίπεδο του 0.5.

Έλεγχος για τη διασπορά  $\sigma^2$ :

$H_0 : \sigma^2 \leq 0.25, H_1 : \sigma^2 > 0.25$ , [μονόπλευρος έλεγχος]

$$q = \chi^2 \equiv \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2,$$

Κρίσιμη τιμή:  $\chi_{24,0.99}^2 = 42.98 \Rightarrow$

Περιοχή απόρριψης της  $H_0$ :  $R = \{\chi^2 \mid \chi^2 > 42.98\}$

## Παράδειγμα: Έλεγχος διασποράς (συνέχεια)

Στατιστική ελέγχου από το δείγμα  
( $n = 25$ ,  $s^2 = 0.375$ )

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{24 \cdot 0.375}{0.25} = 36.0$$

$\tilde{\chi}^2 \notin R \rightarrow$  μή απόρριψη της  $H_0$  για  $\alpha = 0.01$

$p$ -τιμή για  $\tilde{\chi}^2 = 36.0$

$$\begin{aligned} p &= 1 - P(\chi^2 < \tilde{\chi}^2) \\ &= 1 - P(\chi^2 \leq 36.0) = 1 - 0.945 = 0.055!!! \end{aligned}$$

## Παράδειγμα: Έλεγχος αναλογίας

Μια εταιρεία ενδιαφέρεται να ελέγξει σε σημαντικότητα 0.05 αν η αναλογία των σκουριασμένων ραβδών χάλυβα στην αποθήκη της είναι 0.19.

Δείγμα: 12 σκουριασμένες σε σύνολο 100 ραβδών.

$$H_0 : p = 0.19 \quad H_1 : p \neq 0.19 \quad [\text{δίπλευρος έλεγχος}]$$

$n$  μεγάλο

$$q = z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0, 1)$$

Κρίσιμη τιμή  $z_{0.975} = 1.96$

Περιοχή απόρριψης  $R = \{z \mid |z| > 1.96\}$



## Παράδειγμα: Έλεγχος αναλογίας (συνέχεια)

Στατιστική ελέγχου από το δείγμα ( $\hat{p} = 0.12$ )

$$\tilde{z} = \frac{0.12 - 0.19}{\sqrt{\frac{0.19 \cdot 0.81}{100}}} = -1.784.$$

$\tilde{z} \notin R \rightarrow$  μη απόρριψη της  $H_0$  για  $\alpha = 0.05$

Διάστημα εμπιστοσύνης  $[0.056, 0.184]$  ?

Υπολογίστηκε από  $\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

## Παράδειγμα: Έλεγχος αναλογίας (συνέχεια)

Η εταιρεία γνωρίζει ότι είναι **απίθανο** το ποσοστό να κυμαίνεται σε επίπεδα **μεγαλύτερα** του 19%

$$H_0 : p \geq 0.19, \quad H_1 : p < 0.19 \quad [\text{μονόπλευρος έλεγχος}]$$

Κρίσιμη τιμή  $z_{0.95} = 1.65$

Περιοχή απόρριψης  $R = \{z \mid z < -1.65\}$

$$\tilde{z} = -1.784 \quad (\text{όπως πριν})$$

$\tilde{z} \in R \rightarrow$  απόρριψη της  $H_0$  για  $\alpha = 0.05$

$p$ -τιμή

$$\begin{aligned} p &= P(z < \tilde{z}) = P(z < -1.784) = \Phi(-1.784) \\ &= 1 - \Phi(1.784) = 1 - 0.963 = 0.037 \end{aligned}$$

Ανώτατο επίπεδο εμπιστοσύνης που μπορούμε να απορρίψουμε την  $H_0 : p \geq 0.19$  είναι περίπου 96%.

## Παράδειγμα: Έλεγχος διαφοράς μέσων τιμών, γνωστό $\sigma^2$

Θέλουμε να ελέγξουμε αν οι γαιάνθρακες από δύο κοίτασματα A και B έχουν το ίδιο μέσο πορώδες ηλίου. Θεωρούμε γνωστή και κοινή διασπορά  $\sigma^2 = 0.4$ .

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2, \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad [\text{δίπλευρος έλεγχος}]$$

γνωστή και κοινή διασπορά, κανονικές κατανομές

$$q = z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

Κρίσιμη τιμή:  $z_{0.975} = 1.96$

Περιοχή απόρριψης της  $H_0$ ,  $R = \{z \mid |z| > 1.96\}$

## Παράδειγμα: Έλεγχος διαφοράς μέσων τιμών, γνωστό $\sigma^2$ (συνέχεια)

Στατιστική ελέγχου από το δείγμα  
( $\bar{x}_1 = 5.67$ ,  $\bar{x}_2 = 5.38$ ,  $n_1 = 25$ ,  $n_2 = 20$ )

$$\tilde{z} = \frac{5.67 - 5.38}{\sqrt{\frac{0.4}{25} + \frac{0.4}{20}}} = 1.53$$

$\tilde{z} \notin R \rightarrow$  μή απόρριψη της  $H_0$  για  $\alpha = 0.05$

$p$ -τιμή για  $\tilde{z} = 1.53$

$$\begin{aligned} p &= 2(1 - P(z < |\tilde{z}|)) = 2(1 - \Phi(|\tilde{z}|)) \\ &= 2(1 - \Phi(1.53)) = 2(1 - 0.937) = 0.126 \end{aligned}$$

## Παράδειγμα: Έλεγχος διαφοράς μέσων τιμών, άγνωστο $\sigma^2$

Διασπορά του πορώδους ηλίου κοινή αλλά άγνωστη

$H_0 : \mu_1 = \mu_2, H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$  [δίπλευρος έλεγχος]

άγνωστη και κοινή διασπορά, κανονικές κατανομές

$$q = t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

Κρίσιμη τιμή:  $t_{43,0.975} = 2.02$

Περιοχή απόρριψης της  $H_0, R = \{t \mid |t| > 2.02\}$

## Παράδειγμα: Έλεγχος διαφοράς μέσων τιμών, άγνωστο $\sigma^2$ (συνέχεια)

Στατιστική ελέγχου από το δείγμα

$$(\bar{x}_1 = 5.67, \bar{x}_2 = 5.38, n_1 = 25, n_2 = 20$$

$$s_1^2 = 0.375, s_2^2 = 0.326 \rightarrow s^2 = 0.353, s = 0.594)$$

$$\tilde{t} = \frac{5.67 - 5.38}{0.594 \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{20}}} = 1.63$$

$\tilde{t} \notin R \rightarrow$  μή απόρριψη της  $H_0$  για  $\alpha = 0.05$

Διάστημα εμπιστοσύνης  $[-0.07, 0.65]$

$p$ -τιμή για  $\tilde{t} = 1.63$

$$\begin{aligned} p &= 2(1 - P(t < |\tilde{t}|)) \\ &= 2(1 - P(t \leq 1.63)) = 2(1 - 0.945) = 0.11 \end{aligned}$$

## Παράδειγμα: Έλεγχος διαφοράς αναλογιών

Θέλουμε να ελέγξουμε αν οι αναλογίες σκουριασμένων ραβδών χάλυβα είναι ίδιες σε δύο αποθήκες.

Δεδομένα:

πρώτη αποθήκη, 12 στις 100 ράβδους σκουριασμένες,

δεύτερη αποθήκη, 26 στις 120 ράβδους σκουριασμένες.

$H_0 : p_1 = p_2$     $H_1 : p_1 \neq p_2$    [δίπλευρος έλεγχος]

$n$  μεγάλο

$$q = z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

Σύμφωνα με τη μηδενική υπόθεση είναι  $p_1 = p_2 = p$

Η στατιστική έλεγχου γίνεται

$$q = z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{p(1-p) \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \sim N(0, 1)$$

## Παράδειγμα: Έλεγχος διαφοράς αναλογιών (συνέχεια)

Κρίσιμη τιμή  $z_{0.975} = 1.96$

Περιοχή απόρριψης  $R = \{z \mid |z| > 1.96\}$

$\hat{p}_1 = 0.12$ ,  $\hat{p}_2 = 0.217 \rightarrow$  κοινή αναλογία

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{100 \cdot 0.12 + 120 \cdot 0.217}{100 + 120} = 0.173$$

Στατιστική ελέγχου από το δείγμα

$$\tilde{z} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.12 - 0.217}{\sqrt{0.173 \cdot (1-0.173) \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{120}\right)}} = -1.89$$



## Παράδειγμα: Έλεγχος διαφοράς αναλογιών (συνέχεια)

$\tilde{z} \notin R \rightarrow$  μή απόρριψη της  $H_0$  για  $\alpha = 0.05$

Διάστημα εμπιστοσύνης  $[-0.198, 0.004]$

$p$ -τιμή για  $\tilde{z} = -1.89$

$$\begin{aligned} p &= 2(1 - P(z < |\tilde{z}|)) = 2(1 - \Phi(|\tilde{z}|)) \\ &= 2(1 - \Phi(1.89)) = 2(1 - 0.97) = 0.06 \end{aligned}$$

## Παράδειγμα: Έλεγχος διαφοράς αναλογιών (συνέχεια)

Έστω ότι γνωρίζουμε πως η δεύτερη αποθήκη έχει **κατά κανόνα πιο παλιές** ράβδους από την πρώτη

$$H_0 : p_1 \geq p_2, \quad H_1 : p_1 < p_2 \quad [\text{μονόπλευρος έλεγχος}]$$

$$\text{Κρίσιμη τιμή } z_{0.95} = 1.65$$

$$\text{Περιοχή απόρριψης } R = \{z \mid z < -1.65\}$$

$$\tilde{z} = -1.89 \quad (\text{όπως πριν})$$

$$\tilde{z} \in R \rightarrow \text{απόρριψη της } H_0 \text{ για } \alpha = 0.05$$

$p$ -τιμή

$$\begin{aligned} p &= P(z < \tilde{z}) = P(z < -1.89) = \Phi(-1.89) \\ &= 1 - \Phi(1.89) = 1 - 0.97 = 0.03 \end{aligned}$$

Ανώτατο επίπεδο εμπιστοσύνης που μπορούμε να απορρίψουμε την  $H_0 : p_1 \geq p_2$  είναι περίπου 97%.

## Χαρακτηριστικά Ελέγχου

- 1 Σωστή απόφαση (σωστή  $H_0$ ) με πιθανότητα

$$P(\text{αποδοχή της } H_0 \mid H_0 \text{ σωστή}) = 1 - \alpha$$

- 2 Σφάλμα τύπου I με πιθανότητα

$$P(\text{απόρριψη της } H_0 \mid H_0 \text{ σωστή}) = \alpha.$$

- 3 Σφάλμα τύπου II με πιθανότητα

$$P(\text{αποδοχή της } H_0 \mid H_0 \text{ λανθασμένη}) = \beta.$$

- 4 Σωστή απόφαση (σωστή  $H_1$ ) με πιθανότητα

$$P(\text{απόρριψη της } H_0 \mid H_0 \text{ λανθασμένη}) = 1 - \beta$$

[δύναμη ελέγχου]

## Χαρακτηριστικά Ελέγχου (συνέχεια)

