Στατιστική για Χημικούς Μηχανικούς
ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ - 2

Δημήτρης Κουγιουμτζής

20 Μαΐου 2010

Διάστημα εμπιστοσύνης της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$

τ.μ. X_1 με μέση τιμή μ_1 τ.μ. X_2 με μέση τιμή μ_2

Διαφορά $\mu_1 - \mu_2$; [X_1 και X_2 ανεξάρτητες]

Δείγμα $\{x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}\} \longrightarrow \bar{x}_1$

Δείγμα $\{x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}\} \longrightarrow \bar{x}_2$

Εκτιμήτρια της $\mu_1 - \mu_2$: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$

Κατανομή της $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$; [όπως για $\bar{x}$]

Γνωστές διασπορές σ_1^2 και σ_2^2

Υποθέτουμε

$$\left(X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \;\wedge\; X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)\right) \;\vee\; (n_1 > 30 \;\wedge\; n_2 > 30)$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim \mathrm{N}\left(\mu_1 - \mu_2,\; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Αν $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ (ομοσκεδαστικές κατανομές)

διασπορά: $\sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$

Δ.ε. της $\mu_1 - \mu_2$, γνωστά σ_1^2 και σ_2^2

Η διαδικασία είναι όπως για δ.ε. της μ:

	μ	$\longrightarrow$	$\mu_1 - \mu_2$
εκτιμήτρια	$\bar{x}$	$\longrightarrow$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$
μέση τιμή της	μ	$\longrightarrow$	$\mu_1 - \mu_2$
διασπορά της	$\frac{\sigma^2}{n}$	$\longrightarrow$	$\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$
δ.ε.	$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$	$\longrightarrow$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

Διαδικασία εκτίμησης δ.ε. της $\mu_1 - \mu_2$

1. Επιλογή του $1-\alpha$, σ_1, σ_2 γνωστά, $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμης τιμής $z_{1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για τυπική κανονική κατανομή.
3. Αντικατάσταση στον τύπο

$$\left[\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

Παράδειγμα: Πορώδες ηλίου του γαιάνθρακα

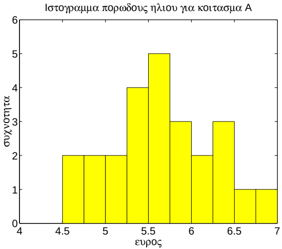
	τύπος A		τύπος B	
A/A	x_{1i}	x_{1i}^2	x_{2i}	x_{2i}^2
1	5.3	28.1	5.0	25.0
2	4.5	20.2	4.2	17.6
3	5.7	32.5	5.4	29.2
4	5.8	33.6	5.5	30.2
5	4.8	23.0	4.6	21.2
6	6.4	41.0	6.1	37.2
7	6.4	41.0	6.1	37.2
8	5.6	31.4	5.3	28.1
9	5.8	33.6	5.5	30.2
10	5.7	32.5	5.4	29.2
11	5.5	30.2	5.2	27.0
12	6.1	37.2	5.8	33.6
13	5.2	27.0	4.9	24.0
14	7.0	49.0	6.7	44.9
15	5.5	30.2	5.2	27.0
16	5.7	32.5	5.4	29.2
17	6.3	39.7	6.0	36.0
18	5.6	31.4	5.3	28.1
19	5.5	30.2	5.2	27.0
20	5.0	25.0	4.8	23.0
21	5.8	33.6		
22	4.7	22.1		
23	6.1	37.2		
24	6.7	44.9		
25	5.1	26.0		
Σύνολο	141.8	813.3	107.6	585.08

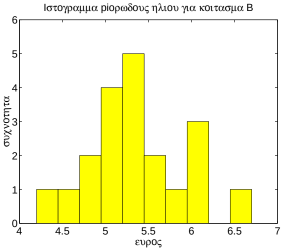
Παράδειγμα (συνέχεια)

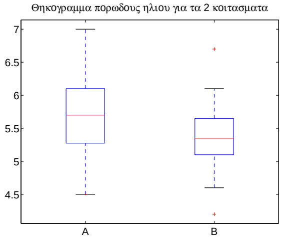
Δίνεται ότι η διασπορά είναι κοινή και γνωστή $\sigma^2 = 0.38$

Ζητάμε δ.ε. για $\mu_1 - \mu_2$ Κατανομή της $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$;

- n_1 και n_2 είναι μικρά







$$\Downarrow$$

$$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, 0.38) \quad \text{και} \quad X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, 0.38)$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\bar{x}_1 = 5.67, \quad \bar{x}_2 = 5.38 \quad \rightarrow \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0.29$$

Διαδικασία εκτίμησης του δ.ε. της $\mu_1 - \mu_2$

1. $1 - \alpha = 0.95, \quad \sigma = \sqrt{0.38}, \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0.29.$
2. Κρίσιμη τιμή: $z_{0.975} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96.$
3. $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} =$
   $0.29 \pm 1.96\sqrt{0.38 \cdot \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{20}\right)} \rightarrow [-0.073, 0.653]$

Συμπεράσματα

• Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% **δε** μπορούμε να πούμε πως το πορώδες ηλίου διαφέρει σημαντικά στους γαιάνθρακες από τα δύο κοιτάσματα.

• Το διάστημα $[-0.073, 0.653]$ είναι σχεδόν θετικό αλλά δε δίνει στατιστικά σημαντική διαφορά $\Longrightarrow$ αύξηση των n_1, n_2.

Άγνωστες διασπορές σ_1^2 και σ_2^2

Περίπτωση 1: μεγάλα δείγματα ($n_1, n_2 > 30$)

$s_1^2 \quad \longrightarrow \quad \sigma_1^2 \qquad$ και $\qquad s_2^2 \quad \longrightarrow \quad \sigma_2^2$:

$$\left[\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}, \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right]$$

Άγνωστες διασπορές σ_1^2 και σ_2^2 (συνέχεια)

Περίπτωση 2: μικρά δείγματα (n_1 ή $n_2 < 30$) **και**
$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2) \;\wedge\; X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$ **και**
ομοσκεδαστικές κατανομές: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Υπολογίζουμε πρώτα την εκτίμηση της κοινής διασποράς

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

s^2 είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της κοινής διασποράς σ^2
Εκτιμήτρια διασποράς της $\mu_1 - \mu_2$: $s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$

$$\Downarrow$$

$$t \equiv \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim \mathrm{t}_{n_1+n_2-2}$$

$$\Downarrow$$

$$(1-\alpha)\% \text{ δ.ε.: } (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Άγνωστες διασπορές σ_1^2 και σ_2^2 (συνέχεια)

Διαδικασία εκτίμησης δ.ε. της $\mu_1 - \mu_2$

1. Επιλογή του $1-\alpha$, s και $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμης τιμής $t_{n_1+n_2-2,\,1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για κατανομή student.
3. Αντικατάσταση στον τύπο
   $$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

Περίπτωση 3: μικρά δείγματα (n_1 ή $n_2 < 30$) **και** $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ **και** $(X_1 \nsim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2) \vee X_2 \nsim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2))$

Μη-παραμετρική μέθοδος

Περίπτωση 4: μικρά δείγματα (n_1 ή $n_2 < 30$) **και** $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Δεν υπάρχει γνωστή μέθοδος εκτίμησης δ.ε. (χρησιμοποιούνται τεχνικές επαναδειγματοληψίας)

Παράδειγμα:πορώδες ηλίου γαιάνθρακα, δύο κοιτάσματα

Οι διασπορές του πορώδες ηλίου στους γαιάνθρακες από τα κοιτάσματα A και B είναι άγνωστες
Μικρά δείγματα ($n_1 = 25$, $n_2 = 20$) **και**
κατανομές των X_1, X_2 κανονικές [ιστογράμματα, θηκογράμματα]
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0.29 \qquad s_1^2 = 0.375 \qquad s_2^2 = 0.326$
$s_1^2 \simeq s_2^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$
$s^2 = \frac{24 \cdot 0.375 + 19 \cdot 0.326}{43} = 0.353 \qquad s = 0.594$

Διαδικασία εκτίμησης του δ.ε. της $\mu_1 - \mu_2$

1. $1 - \alpha = 0.95, \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0.29, \quad s = 0.594.$
2. Κρίσιμη τιμή: $t_{43,0.975} = 2.02$
3. $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}\, s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} =$

   $0.29 \pm 2.02 \cdot 0.594 \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{20}} \quad \rightarrow \quad [-0.07, 0.65]$

Το μέσο πορώδες ηλίου γαιανθράκων δε διαφέρει σημαντικά στα δύο κοιτάσματα

Εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης της $\mu_1 - \mu_2$

διασπορές των X_1, X_2	κατανομή των X_1, X_2	n_1, n_2	κατανομή της $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	διάστημα εμπιστοσύνης
γνωστές	κανονική		$z \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
γνωστές	μη κανονική	μεγάλα	$z \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
γνωστές	μη κανονική	μικρά	—	—
άγνωστες άνισες/ίσες		μεγάλα	$z \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$
άγνωστες ίσες	κανονική	μικρά	$t \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$	$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$
άγνωστες ίσες	μη κανονική	μικρά	—	—
άγνωστες άνισες		μικρά	—	—

Διάστημα εμπιστοσύνης της διαφοράς $p_1 - p_2$

p_1: Αναλογία στοιχείων με μια ιδιότητα στον ένα πληθυσμό
p_2: Αναλογία στοιχείων με μια ιδιότητα στον άλλο πληθυσμό
Διαφορά $p_1 - p_2$;
Δείγμα 1: μέγεθος n_1 και m_1 'επιτυχίες' $\quad \hat{p}_1 = \frac{m_1}{n_1}$
Δείγμα 2: μέγεθος n_2 και m_2 'επιτυχίες' $\quad \hat{p}_2 = \frac{m_2}{n_2}$

Εκτιμήτρια της $p_1 - p_2$: $\quad \hat{p}_1 - \hat{p}_2$
Δίνεται ότι για μεγάλα n_1 και n_2

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim \mathrm{N}\left(p_1 - p_2, \ \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$z \equiv \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

και αντικαθιστούμε $p_1 \longrightarrow \hat{p}_1 \qquad p_2 \longrightarrow \hat{p}_2$

Διάστημα εμπιστοσύνης της $p_1 - p_2$ (συνέχεια)

$(1-\alpha)\%$ δ.ε. της $p_1 - p_2$

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}.$$

Εναλλακτικά με χρήση κοινής αναλογίας $\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$:

$$\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right) \rightarrow (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

Διαδικασία εκτίμησης δ.ε. της $p_1 - p_2$

1. Επιλογή του $1-\alpha$, $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμης τιμής $z_{1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για τυπική κανονική κατανομή.
3. Αντικατάσταση στον τύπο
   $$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

Παράδειγμα

Διαφορά στο ποσοστό σκουριασμένων ραβδών χάλυβα σε δύο αποθήκες;
Αποθήκη A: $m_1 = 12$ στις $n_1 = 100$ είναι σκουριασμένες
Αποθήκη B: $m_2 = 26$ στις $n_2 = 120$ είναι σκουριασμένες
$\hat{p}_1 = \frac{12}{100} = 0.12 \qquad \hat{p}_2 = \frac{26}{120} = 0.217$

Διαδικασία εκτίμησης του δ.ε. της $p_1 - p_2$

1. $1 - \alpha = 0.95, \quad \hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0.12 - 0.217 = -0.097.$
2. Κρίσιμη τιμή: $z_{0.975} = 1.96$
3. $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} =$

   $-0.097 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.12 \cdot 0.88}{100} + \frac{0.217 \cdot 0.783}{120}} \quad \rightarrow \quad [-0.198, 0.004]$

Αν και η διαφορά του ποσοστού σκουριασμένων ραβδών στο εργοστάσιο B είναι κατά περίπου 10% μεγαλύτερη, σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% δεν είναι στατιστικά σημαντική.

Άσκηση

Έγιναν μετρήσεις της συγκέντρωσης διαλυμένου οξυγόνου (Δ.Ο.) σε δύο ποτάμια (σε mg/l)

1.8	2.0	2.1	1.7	1.2	2.3	2.5	2.9	1.6	2.2	2.3	1.8	2.4	1.6	1.9
2.3	2.1	1.9	2.6	2.9	1.5	3.1	2.1	2.7	2.3	2.6	2.5			

1. Βρείτε 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων συγκεντρώσεων Δ.Ο. στα δύο ποτάμια υποθέτοντας πρώτα ότι η διασπορά είναι γνωστή $(0.1\,(mg/l)^2)$ και ίδια για τα δύο δείγματα και μετά χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις των διασπορών από τα δείγματα. Μπορούμε να πούμε πως η μέση συγκέντρωση Δ.Ο. είναι ίδια στα δύο ποτάμια (στην κάθε περίπτωση);
2. Για το ίδιο πρόβλημα, σε 200 μετρήσεις στο πρώτο ποτάμι βρέθηκαν 26 τιμές κάτω από την κρίσιμη τιμή 1.6 mg/l και σε 200 μετρήσεις στο δεύτερο ποτάμι βρέθηκαν 18 τιμές κάτω από την κρίσιμη τιμή. Μπορούμε να πούμε σε επίπεδο 95% ότι η συγκέντρωση Δ.Ο. βρίσκεται σε μη επιθυμητά επίπεδα πιό συχνά στο πρώτο ποτάμι από ότι στο δεύτερο;