

Στατιστική για Χημικούς Μηχανικούς ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ - 1

Δημήτρης Κουγιουμτζής

12 Απριλίου 2013

Εισαγωγικά στην εκτίμηση παραμέτρων

τ.μ. X με κατανομή $F_X(x; \theta)$

Παράμετρος θ : άγνωστη

$\theta \rightarrow \mu, \sigma^2, \rho$

Δείγμα $\{x_1, \dots, x_n\}$: γνωστό

Εκτίμηση παραμέτρου

1. Σημειακή εκτίμηση: $\hat{\theta}$
2. Εκτίμηση διαστήματος: $[\theta_1, \theta_2]$

Άλλο δείγμα \rightarrow άλλα δεδομένα $\{x_1, \dots, x_n\}$



$\{x_1, \dots, x_n\}$ συμβολίζουν:

1. Παρατηρήσεις
2. τ.μ. $\{X_1, \dots, X_n\}$ με κατανομή $F_X(x; \theta)$

Σημειακή Εκτίμηση

$\hat{\theta}$: εκτιμήτρια της θ

$\hat{\theta}$ είναι συνάρτηση των τ.μ. $\{x_1, \dots, x_n\}$

$\hat{\theta}$ είναι τ.μ., \Downarrow
 $E(\hat{\theta}) \equiv \mu_{\hat{\theta}}, \text{Var}(\hat{\theta}) \equiv \sigma_{\hat{\theta}}^2$

Εκτίμηση μέσης τιμής (δειγματική μέση τιμή)

$$\theta \rightarrow \mu \qquad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Εκτίμηση διασποράς (δειγματική διασπορά)

$$\theta \rightarrow \sigma^2 \qquad \tilde{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)$$

Κριτήρια καλών εκτιμητριών

1. Αμερόληψια

$\hat{\theta}$ αμερόληπτη: $E(\hat{\theta}) = \theta$

αλλιώς η μερόληψια είναι $b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$

Παραδείγματα

- Η δειγματική μέση τιμή \bar{x} είναι αμερόληπτη: $E(\bar{x}) = \mu$

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu$$

- Η δειγματική διασπορά s^2 είναι αμερόληπτη: $E(s^2) = \sigma^2$
- Η δειγματική διασπορά \tilde{s}^2 είναι μεροληπτική:



$$b(\tilde{s}^2) = E(\tilde{s}^2) - \sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}$$

Ασυμπτωτικά ($n \rightarrow \infty$) η \tilde{s}^2 είναι αμερόληπτη

Κριτήρια καλών εκτιμητριών (συνέχεια)

2. Συνέπεια

$\hat{\theta}$ συνεπής: $P(|\theta - \hat{\theta}| \leq \epsilon) \rightarrow 1$ όταν $n \rightarrow \infty$

Παραδείγματα

- \bar{x} , s^2 , \tilde{s}^2 είναι συνεπείς
- Η εκτιμήτρια της μ : $x_d = (x_{\min} + x_{\max})/2$ δεν είναι συνεπής

3. Αποτελεσματικότητα

Δύο εκτιμήτριες $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ της θ :

$\hat{\theta}_1$ είναι πιο αποτελεσματική από $\hat{\theta}_2$ όταν $\sigma_{\hat{\theta}_1}^2 < \sigma_{\hat{\theta}_2}^2$

Παράδειγμα

- \bar{x} είναι πιο αποτελεσματική από τη x_d γιατί $\sigma_{\bar{x}}^2 < \sigma_{x_d}^2$.

Κριτήρια καλών εκτιμητριών (συνέχεια)

4. Επάρκεια

$\hat{\theta}$ είναι επαρκής όταν χρησιμοποιεί όλη την πληροφορία από το δείγμα που σχετίζεται με τη θ .

Παραδείγματα

- \bar{x} , s^2 , \tilde{s}^2 είναι επαρκείς γιατί χρησιμοποιούν όλες τις παρατηρήσεις $\{x_1, \dots, x_n\}$
- x_d δεν είναι επαρκής γιατί χρησιμοποιεί μόνο x_{\min} και x_{\max} .

Παρατηρήσεις

- Μια καλή εκτιμήτρια πρέπει να πληρεί αυτές τις ιδιότητες.
- Βέλτιστη εκτιμήτρια: αμερόληπτη και με ελάχιστη διασπορά

Θέμα 4

Εξισορρόπηση μεροληψίας και διασποράς εκτίμησης: το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (mean square error).

Υπολογισμός σημειακής εκτίμησης

Θέλουμε να εκτιμήσουμε τη θ παράμετρο κατανομής $F(x; \theta)$ μιας τ.μ. X από τα ανεξάρτητα δεδομένα $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Μέθοδος των Ροπών

- 1 Εκτιμούμε πρώτα τις ροπές της κατανομής:
 - ροπή πρώτου βαθμού: $\mu \leftarrow \bar{x}$
 - ροπή δεύτερου βαθμού: $\sigma^2 \leftarrow s^2$
- 2 Από τη σχέση της θ με τις ροπές υπολογίζουμε την εκτίμηση $\hat{\theta}$.

Παραδείγματα

- Κανονική κατανομή: παράμετροι μ και σ^2 είναι οι ίδιες ροπές (άμεση εκτίμηση).
- Ομοιόμορφη κατανομή στο $[a, b]$: παράμετροι a και b υπολογίζονται από $\mu = \frac{a+b}{2}$ και $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ (έμμεση εκτίμηση).

Παράδειγμα: Μετρήσεις πορώδους ηλίου σε γαιάνθρακες

A/A	x_i	x_i^2
1	5.3	28.1
2	4.5	20.2
3	5.7	32.5
4	5.8	33.6
5	4.8	23.0
6	6.4	41.0
7	6.4	41.0
8	5.6	31.4
9	5.8	33.6
10	5.7	32.5
11	5.5	30.2
12	6.1	37.2
13	5.2	27.0
14	7.0	49.0
15	5.5	30.2
16	5.7	32.5
17	6.3	39.7
18	5.6	31.4
19	5.5	30.2
20	5.0	25.0
21	5.8	33.6
22	4.7	22.1
23	6.1	37.2
24	6.7	44.9
25	5.1	26.0
Σύνολο	141.8	813.3

Υποθέτουμε κανονική κατανομή:

παράμετροι μ και σ^2

Εκτίμηση μέσης τιμής:

$$\bar{x} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} x_i = \frac{1}{25} 141.8 = 5.67$$

Για s^2 , υπολογίζουμε πρώτα το άθροισμα τετραγώνων

$$\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 813.3$$

Εκτίμηση διασποράς:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{25 - 1} \left(\sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 25 \cdot \bar{x}^2 \right) \\ &= \frac{1}{24} (813.3 - 25 \cdot 5.67^2) = 0.375 \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ομοιόμορφη κατανομή στο $[a, b]$:

παράμετροι a και b

Εκτίμηση των a και b :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{a+b}{2} \\ s^2 &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \bar{x} - \sqrt{3}s \\ \hat{b} &= \bar{x} + \sqrt{3}s \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\hat{a} = 4.61$$

$$\hat{b} = 6.73$$

Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας

Δίνονται ανεξάρτητα $\{x_1, \dots, x_n\}$, $x_i \sim F(x; \theta)$

→ ποια είναι η πιο πιθανή τιμή για τη θ ;

$f(x_i; \theta)$ ή $P(X = x_i; \theta)$ για κάποια τιμή $X = x_i$

Συνάρτηση πιθανοφάνειας (πιθανότητα να παρατηρήσουμε $\{x_1, \dots, x_n\}$ σ' ένα τυχαίο δείγμα)

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \cdots f(x_n; \theta)$$

Αν $L(x_1, \dots, x_n; \theta_1) > L(x_1, \dots, x_n; \theta_2)$ τότε θ_1 πιο αληθοφανής από θ_2

Η 'πιο αληθοφανής' τιμή της θ : αυτή που μεγιστοποιεί τη $L(x_1, \dots, x_n; \theta)$ ή $\log L(x_1, \dots, x_n; \theta)$.

Εκτιμητρία μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\theta}$ δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{\partial \log L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0.$$

Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας (συνέχεια)

Θέλουμε να εκτιμήσουμε $\theta_1, \dots, \theta_m$

Συνάρτηση πιθανοφάνειας: $L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m)$

Εκτιμητρίες μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m$ δίνονται από

$$\frac{\partial \log L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m)}{\partial \theta_j} = 0 \quad j = 1, \dots, m.$$

Παρατηρήσεις

- Η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας μπορεί να εφαρμοσθεί για οποιοδήποτε θ αν ξέρουμε την κατανομή $F_X(x; \theta)$.
- Η μέθοδος των ροπών δεν εφαρμόζεται αν η θ δε μπορεί να υπολογισθεί από τις ροπές.
- Η εκτιμητρία μέγιστης πιθανοφάνειας είναι αμερόληπτη (ασυμπτωτικά), συνεπής, αποτελεσματική κι επαρκής.

Εκτίμηση παραμέτρων κανονικής κατανομής

$\{x_1, \dots, x_n\}$ από κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ και σ^2 γνωστή

$$f_X(x; \mu) \equiv f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{εκτίμηση του } \mu;$$

συνάρτηση πιθανότητας

$$L(x_1, \dots, x_n; \mu) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{n/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right]$$

$$\log L(x_1, \dots, x_n; \mu) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

Εκτιμητριά μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\mu}$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

Εκτίμηση παραμέτρων κανονικής κατανομής (συνέχεια)

Και η διασπορά σ^2 άγνωστη

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0$$

Η επίλυση δίνει για μ , $\hat{\mu} = \bar{x}$, και για σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \hat{\zeta}^2$$

Εκτίμηση Διαστήματος εμπιστοσύνης

Μελετήσαμε την εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ παραμέτρου θ :

Αν γνωρίζουμε την κατανομή της X και είναι $F_X(x; \theta)$, τότε βρίσκουμε τη $\hat{\theta}$ με

- 1 Μέθοδο ροπών
- 2 Μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας

Ανεξάρτητα από την κατανομή της X έχουμε τους εκτιμητές:

$$\begin{aligned}\theta := \mu &\rightarrow \hat{\theta} = \bar{x} \\ \theta := \sigma^2 &\rightarrow \hat{\theta} = s^2 \quad \text{ή} \quad \hat{\theta} = \tilde{s}^2\end{aligned}$$

Η τιμή της εκτιμήτριας $\hat{\theta}$ εξαρτάται από το δείγμα $\{x_1, \dots, x_n\}$.
 $\hat{\theta}$ είναι τ.μ. με $E(\hat{\theta}) \equiv \mu_{\hat{\theta}}$, $\text{Var}(\hat{\theta}) \equiv \sigma_{\hat{\theta}}^2$

Κατανομή της $\hat{\theta}$? $E(\hat{\theta})$? $\text{Var}(\hat{\theta})$?

Με βάση την κατανομή της $\hat{\theta}$ θέλουμε να ορίσουμε ένα διάστημα $[\theta_1, \theta_2]$ που θα περιέχει με κάποια πιθανότητα την πραγματική τιμή της θ .

Διάστημα εμπιστοσύνης της μ

Εκτιμητήρια (σημειακή εκτίμηση) της μ : \bar{x}

$$\mu_{\bar{x}} = E(\hat{\mu}) = \mu$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}}^2 &= \text{Var}(\bar{x}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(x_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 \\ &= \frac{1}{n^2} (n \cdot \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n} \quad \text{σταθερό σφάλμα}$$

Η κατανομή της \bar{x} εξαρτάται από

- 1 τη διασπορά της X , σ^2 (γνωστή / άγνωστη)
- 2 την κατανομή της X (κανονική ή όχι)
- 3 μέγεθος του δείγματος n (μεγάλο / μικρό)

Διάστημα εμπιστοσύνης της μ - γνωστή διασπορά σ^2

Για την κατανομή της \bar{x} έχουμε δύο περιπτώσεις

$$\boxed{1} X \sim N(\mu, \sigma^2) \vee \boxed{2} n > 30 \Rightarrow \bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$X \approx N(\mu, \sigma^2) \wedge n < 30 \Rightarrow \bar{x} \sim ?$$

1 Αν η κατανομή της X είναι κανονική



κατανομή της $X_1 + \dots + X_n$ είναι κανονική



η κατανομή της \bar{x} είναι κανονική

2 Αν το δείγμα είναι μεγάλο $n > 30$

⇓ Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

η κατανομή της \bar{x} είναι κανονική

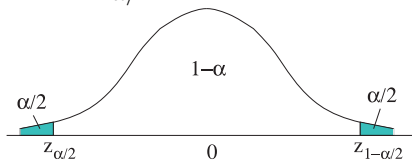
Θέμα 5

Αν ρίξουμε πολλά νομίσματα ο συνολικός αριθμός των κεφαλών θα ακολουθεί κανονική κατανομή

γνωστό σ^2 και \bar{x} ακολουθεί κανονική κατανομή

$$\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \Rightarrow z \equiv \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Για κάθε πιθανότητα α (και $1 - \alpha$) υπάρχουν οι αντίστοιχες τιμές της z , $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$:



$$\left. \begin{aligned} P(z < z_{\alpha/2}) &= \Phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2 \\ P(z > z_{1-\alpha/2}) &= 1 - \Phi(z_{1-\alpha/2}) = 1 - (1 - \alpha/2) = \alpha/2 \end{aligned} \right\}$$

$$P(z < z_{\alpha/2} \vee z > z_{1-\alpha/2}) = \alpha \Rightarrow$$

$$P(z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}) = \Phi(z_{1-\alpha/2}) - \Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Από τον στατιστικό πίνακα τυπικής κανονικής κατανομής

Δίνεται πιθανότητα $1 - \alpha \Rightarrow$ κρίσιμη τιμή $z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$

γνωστό σ^2 , \bar{x} ακολουθεί κανονική κατανομή (συνέχεια)

η z ανήκει στο διάστημα $[z_{\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}] = [-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$ με πιθανότητα $1 - \alpha$.

Από το μετασχηματισμό $z \equiv \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ έχουμε για τα άκρα του διαστήματος $[-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$

$$-z_{1-\alpha/2} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad z_{1-\alpha/2} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Λύνουμε ως προς μ

$$\mu = \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \mu = \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Διάστημα εμπιστοσύνης της μ σε επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - \alpha$

$$\left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

γνωστό σ^2 , \bar{x} ακολουθεί κανονική κατανομή (συνέχεια)

Ερμηνεία διαστήματος εμπιστοσύνης

- 'με πιθανότητα (εμπιστοσύνη) $1 - \alpha$ η μέση τιμή μ βρίσκεται μέσα σ' αυτό το διάστημα'

OXI

- 'αν χρησιμοποιούσαμε πολλά τέτοια διαστήματα από διαφορετικά δείγματα, ποσοστό $(1 - \alpha)\%$ από αυτά θα περιείχαν τη μ '

NAI

ή

'με $1 - \alpha$ πιθανότητα (εμπιστοσύνη) το διάστημα αυτό θα περιέχει την πραγματική μ '

NAI

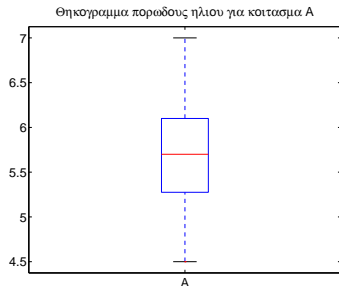
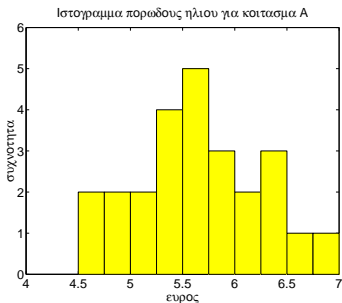
γνωστό σ^2 , \bar{x} ακολουθεί κανονική κατανομή (συνέχεια)

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του μ

- 1 Επιλογή του $1 - \alpha$, σ γνωστό, \bar{x} από το δείγμα.
- 2 Εύρεση κρίσιμης τιμής $z_{1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για τυπική κανονική κατανομή.
- 3 Αντικατάσταση στον τύπο $[\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

Παράδειγμα

Διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 95% για το μέσο ποσοστό πορώδες ηλίου σε γαιάνθρακα του κοιτάσματος A;
Δίνεται $\sigma^2 = 0.38$



συμμετρία, όχι μακριές ουρές, όχι ακραία σημεία



$$X \sim N(\mu, 0.38)$$

$\mu = ?$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$X \sim N(\mu, 0.38) \Rightarrow \bar{x} \sim N(\mu, 0.38/25)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} x_i = \frac{141.8}{25} = 5.67$$

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του μ

- ① $1 - \alpha = 0.95$, $\sigma = \sqrt{0.38}$, $\bar{x} = 5.67$.
- ② Κρίσιμη τιμή: $z_{0.975} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$.
- ③ $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 5.67 \pm 1.96 \frac{\sqrt{0.38}}{5} \rightarrow [5.43, 5.91]$

Συμπέρασμα:

Σε 95% επίπεδο εμπιστοσύνης περιμένουμε το μέσο ποσοστό πορώδους ηλίου σε γαιάνθρακα με βάση το δείγμα του κοιτάσματος A να κυμαίνεται μεταξύ 5.43 και 5.91

Διάστημα εμπιστοσύνης της μ , άγνωστη διασπορά σ^2

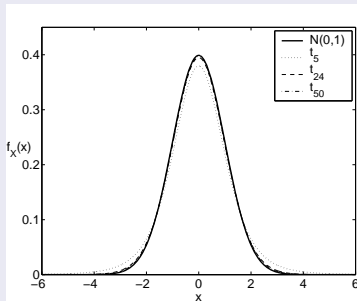
Περίπτωση 1: μεγάλο δείγμα ($n > 30$)

$$s^2 \rightarrow \sigma^2: \quad \left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

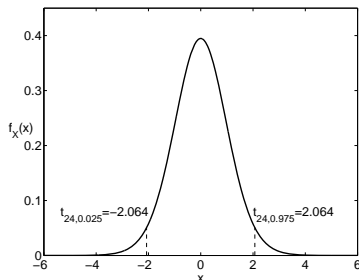
Περίπτωση 2: μικρό δείγμα ($n < 30$) και $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Τότε ισχύει $t \equiv \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

κατανομή student με $n - 1$ βαθμούς ελευθερίας



Άγνωστη διασπορά σ^2



Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του μ

- 1 Επιλογή του $1 - \alpha$, σ άγνωστο, \bar{x} και s από το δείγμα.
- 2 Εύρεση κρίσιμης τιμής $t_{n-1, 1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για κατανομή student.
- 3 Αντικατάσταση στον τύπο

$$\left[\bar{x} - t_{n-1, 1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1, 1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

Άγνωστη διασπορά σ^2

Περίπτωση 3: μικρό δείγμα ($n < 30$) και $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Μη-παραμετρική μέθοδος

Θέμα 6

Μη-παραμετρική μέθοδος: διάστημα εμπιστοσύνης για τη διάμεσο (Wilcoxon)

Θέμα 7

Μη-παραμετρική μέθοδος: διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή με τη μέθοδο bootstrap

Παράδειγμα

Διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 95% για το μέσο πορώδες ηλίου γαιάνθρακα από το κοίτασμα A; $[\sigma^2 \text{ άγνωστο}]$

Μικρό δείγμα ($n < 30$) και $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$t \equiv \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, βαθμοί ελευθερίας: $n - 1 = 24$

$$s^2 = \frac{1}{24} \left(\sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 25 \cdot (5.67)^2 \right) = \frac{1}{24} (813.3 - 804.3) = 0.375$$

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του μ

- 1 $1 - \alpha = 0.95$, $\bar{x} = 5.67$, $s^2 = 0.375$.
- 2 Κρίσιμη τιμή: $t_{24, 0.975} = 2.064$.
- 3 $\bar{x} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \rightarrow 5.67 \pm 2.064 \frac{\sqrt{0.375}}{5} \rightarrow [5.42, 5.92]$

Αν $z_{0.975} = 1.96$ αντί $t_{24, 0.975} = 2.064$

$$5.67 \pm 1.96 \frac{\sqrt{0.375}}{5} \rightarrow [5.52, 5.82]$$

Εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης της μ

διασπορά	X -κατανομή	n	\bar{x} -κατανομή	$\delta.ε.$
γνωστή	κανονική		$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
γνωστή	μη κανονική	μεγάλο	$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
γνωστή	μη κανονική	μικρό	—	—
άγνωστη		μεγάλο	$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$
άγνωστη	κανονική	μικρό	$t \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	$\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$
άγνωστη	μη κανονική	μικρό	—	—

Γενικά για το $\delta.ε.$ της μ βρίσκεται από
 $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ή $\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$

Εύρος διαστήματος εμπιστοσύνης)

Το διάστημα εμπιστοσύνης εξαρτάται από:

- την **κατανομή** και τη σ^2 της τ.μ. X
- το μέγεθος n του δείγματος
- το επίπεδο εμπιστοσύνης $1 - \alpha$

Για δεδομένο εύρος διαστήματος εμπιστοσύνης μπορούμε να βρούμε το μέγεθος n που αντιστοιχεί από τον αντίστοιχο τύπο.

Ενδεικτική περίπτωση: $n < 30$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και σ^2 άγνωστο

εύρος του δ.ε. $w = 2t_{n-1, 1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

Για εύρος w πρέπει το δείγμα να έχει μέγεθος

$$n = \left(2t_{n-1, 1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{w} \right)^2 \quad \text{ή} \quad n = \left(2z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{w} \right)^2$$

ανάλογα με το n που βρίσκουμε.

Παράδειγμα

Στο προηγούμενο αριθμητικό παράδειγμα (πορώδες ηλίου), χρησιμοποιώντας t -κατανομή βρήκαμε 95% δ.ε.

$$5.67 \pm 2.064 \frac{\sqrt{0.375}}{5} \rightarrow [5.42, 5.92]$$

Εύρος δ.ε.: $2 \cdot 2.064 \frac{\sqrt{0.375}}{5} = 0.50$ ή ισοδύναμα

ακρίβεια γύρω από τη \bar{x} : $2.064 \frac{\sqrt{0.375}}{5} = 0.25$

Αν θέλουμε εύρος 0.20 (ή ακρίβεια 0.10), πόσο πρέπει να μεγαλώσει το δείγμα;

(κανονική κατανομή) $n = \left(2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sqrt{0.375}}{0.25}\right)^2 = 92.2 \simeq 93$

(κατανομή student)

$$t_{24,0.975} = 2.064 \rightarrow n = \left(2 \cdot 2.064 \cdot \frac{\sqrt{0.375}}{0.25}\right)^2 = 102.2 \simeq 102$$

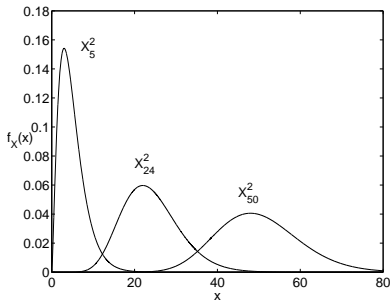
$$t_{101,0.975} = 1.984 \rightarrow n = \left(2 \cdot 1.984 \cdot \frac{\sqrt{0.375}}{0.25}\right)^2 = 94.5 \simeq 95$$

$$t_{94,0.975} = 1.985 \rightarrow n = \left(2 \cdot 1.985 \cdot \frac{\sqrt{0.375}}{0.25}\right)^2 = 94.6 \simeq 95$$

Διάστημα εμπιστοσύνης της σ^2

s^2 εκτιμήτρια της σ^2

Δίνεται $\chi^2 \equiv \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$

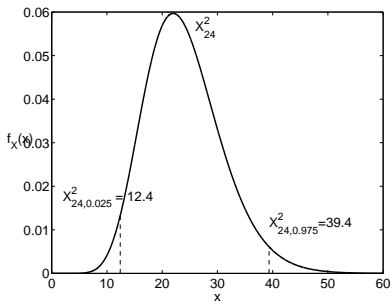


- Για πολύ μεγάλο n : $\chi_{n-1}^2 \rightarrow$ κανονική
- χ_{n-1}^2 δεν είναι συμμετρική κατανομή
- δύο κρίσιμες τιμές:

$$\chi_{n-1, \alpha/2}^2 \rightarrow P(\chi^2 < \chi_{n-1, \alpha/2}^2) = \alpha/2$$

$$\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2 \rightarrow P(\chi^2 < \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2) = 1 - \alpha/2$$

Διάστημα εμπιστοσύνης της σ^2 (συνέχεια)



$$P\left(\chi_{n-1,\alpha/2}^2 < \chi^2 < \chi_{n-1,1-\alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha$$

\Downarrow

$$P\left(\chi_{n-1,\alpha/2}^2 < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n-1,1-\alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha$$

\Downarrow

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1,1-\alpha/2}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1,\alpha/2}^2}\right) = 1 - \alpha$$

Διάστημα εμπιστοσύνης της σ^2 (συνέχεια)

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του σ^2

- 1 Επιλογή του $1 - \alpha$, s^2 από το δείγμα.
- 2 Εύρεση κρίσιμων τιμών $\chi_{n-1, \alpha/2}^2$ και $\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$ από τον πίνακα για κατανομή χ_{n-1}^2 .
- 3 Αντικατάσταση στον τύπο $\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} \right]$

Διάστημα εμπιστοσύνης της τυπικής απόκλισης σ

Το 95% δ.ε. για την τυπική απόκλιση σ έχει ως άκρα τις τετραγωνικές ρίζες των αντίστοιχων άκρων του 95% δ.ε. για τη διασπορά σ^2 .

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2}} \right]$$

Παράδειγμα

Διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 95% για τη διασπορά του πορώδους ηλίου γαιάνθρακα ενός κοιτάσματος A;

$$\chi^2 \equiv \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2, \quad \text{βαθμοί ελευθερίας: } n - 1 = 24$$

$$s^2 = 0.375$$

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του σ^2

① $1 - \alpha = 0.95, \quad s^2 = 0.375.$

② Κρίσιμες τιμές: $\chi_{24,0.025}^2 = 12.4$ και $\chi_{24,0.975}^2 = 39.4.$

③ $\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1,1-\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1,\alpha/2}^2} \right] = \left[\frac{24 \cdot 0.375}{39.4}, \frac{24 \cdot 0.375}{12.4} \right] = [0.228, 0.726]$

Το 95% δ.ε. για την τυπική απόκλιση σ του πορώδους ηλίου γαιάνθρακα είναι

$$[\sqrt{0.228}, \sqrt{0.726}] = [0.478, 0.852].$$

Διάστημα εμπιστοσύνης της αναλογίας p

αναλογία $p = \frac{M}{N}$

M : στοιχεία του πληθυσμού που πληρούν μια ιδιότητα ('επιτυχία')

N : σύνολο όλων των στοιχείων του πληθυσμού

Δείγμα μεγέθους n και m 'επιτυχίες'

Εκτιμήτρια της p : $\hat{p} = \frac{m}{n}$

Για μεγάλο n : $\hat{p} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$

↓

$$z \equiv \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0, 1)$$

διάστημα ↓ εμπιστοσύνης

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$\Downarrow \quad p \rightarrow \hat{p} \quad \Downarrow$$

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του p

- 1 Επιλογή του $1 - \alpha$, \hat{p} από το δείγμα.
- 2 Εύρεση κρίσιμης τιμής $z_{1-\alpha/2}$ από τον πίνακα τυπικής κανονικής κατανομής.
- 3 Αντικατάσταση στον τύπο

$$\left[\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

Εύρος διαστήματος εμπιστοσύνης

Εύρος δ.ε. της p : $w = 2z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$$\implies n = \left(\frac{2z_{1-\alpha/2}}{w} \right)^2 \hat{p}(1-\hat{p}) \quad \text{αλλά } p \text{ άγνωστο!}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι: $\max \hat{p}(1-\hat{p}) = 0.25$

$$\implies n = \left(\frac{2z_{1-\alpha/2}}{w} \right)^2 0.25 = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{w} \right)^2$$

Παράδειγμα

95% διάστημα εμπιστοσύνης για την αναλογία σκουριασμένων ραβδών χάλυβα μιας αποθήκης;

Δείγμα από $n = 100$ ράβδους και $m = 12$ σκουριασμένες.

Σημειακή εκτίμηση: $\hat{p} = \frac{12}{100} = 0.12$.

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του p

① $1 - \alpha = 0.95, \quad \hat{p} = 0.12$.

② Κρίσιμη τιμή: $z_{0.975} = 1.96$.

③ $\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \rightarrow 0.12 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.12 \cdot (1-0.12)}{100}} \rightarrow$
 $[0.056, 0.184]$

Μέγιστο n του δείγματος για $w = 0.05$;

$$n = \left(\frac{1.96}{0.05}\right)^2 = 1536.6 \simeq 1537$$

Θέμα 8

Διάστημα εμπιστοσύνης και εκτίμηση μεγέθους δείγματος για αναλογία σε πεπερασμένο πληθυσμό

Άσκηση

Έγιναν 15 μετρήσεις της συγκέντρωσης διαλυμένου οξυγόνου ($\Delta.O.$) σε ένα ποτάμι (σε mg/l)

1.8	2.0	2.1	1.7	1.2	2.3	2.5	2.9	1.6	2.2	2.3	1.8	2.4	1.6	1.9
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Από παλιότερες μετρήσεις γνωρίζουμε ότι η διασπορά του $\Delta.O.$ είναι $0.1 (mg/l)^2$.

- 1 Εκτιμείστε τη διασπορά της συγκέντρωσης $\Delta.O.$ από το δείγμα καθώς και τα διαστήματα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 99% και 90%. Εξετάστε και για τα δύο επίπεδα εμπιστοσύνης αν μπορούμε να δεχτούμε την εμπειρική τιμή της διασποράς για αυτό το δείγμα.
- 2 Εκτιμείστε τη μέση συγκέντρωση $\Delta.O.$ από το δείγμα και δώστε για αυτήν 95% διάστημα εμπιστοσύνης υποθέτοντας πρώτα ότι η διασπορά είναι γνωστή και μετά χρησιμοποιώντας αυτήν του δείγματος.
- 3 Αν υποθέσουμε ότι για ένα εργοστάσιο δίπλα στο ποτάμι είναι σημαντικό η μέση συγκέντρωση $\Delta.O.$ να μην πέφτει κάτω από $1.8 mg/l$, θα προκαλούσαν ανησυχία αυτές οι παρατηρήσεις (διασπορά από το δείγμα);

Άσκηση (συνέχεια)

- 4 Αν δε μας ικανοποιεί το εύρος του τελευταίου παραπάνω διαστήματος και θέλουμε να το μειώσουμε σε 0.2 mg/l πόσες επιπρόσθετες ημερήσιες μετρήσεις πρέπει να γίνουν;
- 5 Ένας άλλος τρόπος να ελέγξουμε αν η συγκέντρωση του Δ.Ο. πέφτει σε μη επιθυμητά επίπεδα είναι να δούμε αν το ποσοστό των ημερών που η τιμή της συγκέντρωσης Δ.Ο. πέφτει στο επίπεδο 1.6 mg/l και κάτω ξεπερνάει το 15%. Εκτιμείστε αυτό το ποσοστό από το δείγμα. Μπορείτε να δώσετε 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό; Πόσο πρέπει να είναι το μέγεθος του δείγματος για να μπορεί να εκτιμηθεί 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό με πλάτος το πολύ 10%;