Διάστημα εμπιστοσύνης αναλογίας *p*

Πληθυσμός με *N* στοιχεία
M από αυτά πληρούν μια ιδιότητα

αναλογία: $p = \frac{M}{N}$

Δείγμα με *n* στοιχεία
m από αυτά πληρούν την ιδιότητα

δειγματική αναλογία: $\hat{p} = \frac{m}{n}$

Κατανομή εκτιμήτριας $\hat{p}$

n μεγάλο ➔ $\hat{p} \sim \mathrm{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

Μέση τιμή: $\mu_{\hat{p}} \equiv \mathrm{E}[\hat{p}] = p$

Διασπορά: $\sigma_{\hat{p}}^2 \equiv \mathrm{Var}[\hat{p}] = \frac{p(1-p)}{n}$

Τυπική απόκλιση (τυπικό σφάλμα): $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

(1-α)% δ.ε. της p: $\boxed{\left(\hat{p} - z_{a/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{a/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)}$

$$\boxed{\left(\hat{p}-z_{a/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\,,\,\hat{p}+z_{a/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)}$$

Το εύρος του δ.ε. της αναλογίας p είναι $w=2z_{a/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Για εύρος w το απαιτούμενο μέγεθος δείγματος είναι

$$n=\left(\frac{2z_{a/2}}{w}\right)^2\hat{p}(1-\hat{p})$$

Πριν από τη μελέτη του δείγματος $\hat{p}$ άγνωστο

$$\max\ \hat{p}(1-\hat{p})=0.25$$

$$n=\left(\frac{2z_{a/2}}{w}\right)^2\cdot 0.25=\left(\frac{z_{a/2}}{w}\right)^2$$

Παράδειγμα

Θέλουμε να εκτιμήσουμε το ποσοστό των μικρών διαμερισμάτων, δηλαδή διαμερισμάτων με ένα ή δύο δωμάτια.

Σε δείγμα 120 διαμερισμάτων μια περιοχής,

19 διαμερίσματα με 1 δωμάτιο, 29 διαμερίσματα με 2 δωμάτια

➔ μικρά διαμερίσματα είναι $m=48$ σε σύνολο $n=120$ διαμερισμάτων

Δειγματική αναλογία: $\hat{p} = \frac{m}{n} = \frac{48}{120} = 0.4$

95% δ.ε. για p ($z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$)

$$\boxed{\left(\hat{p} - z_{a/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{a/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)}$$

$$\left(0.4 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.4(1-0.4)}{120}}, 0.4 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.4(1-0.4)}{120}} \right) = (0.312, 0.488).$$

«Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% η αναλογία των μικρών διαμερισμάτων είναι μεταξύ 0.312 και 0.488 ή αλλιώς το ποσοστό των μικρών διαμερισμάτων είναι μεταξύ 31.2% και 48.8%»

Θέλουμε να μειώσουμε το εύρος του δ.ε. σε $w=0.1$

$$n = \left(\frac{1.96}{0.1} \right)^2 = 384.1 \cong 385$$

Διάστημα εμπιστοσύνης για τη διασπορά

Διασπορά της τ.μ. X
στον πληθυσμό: σ^2

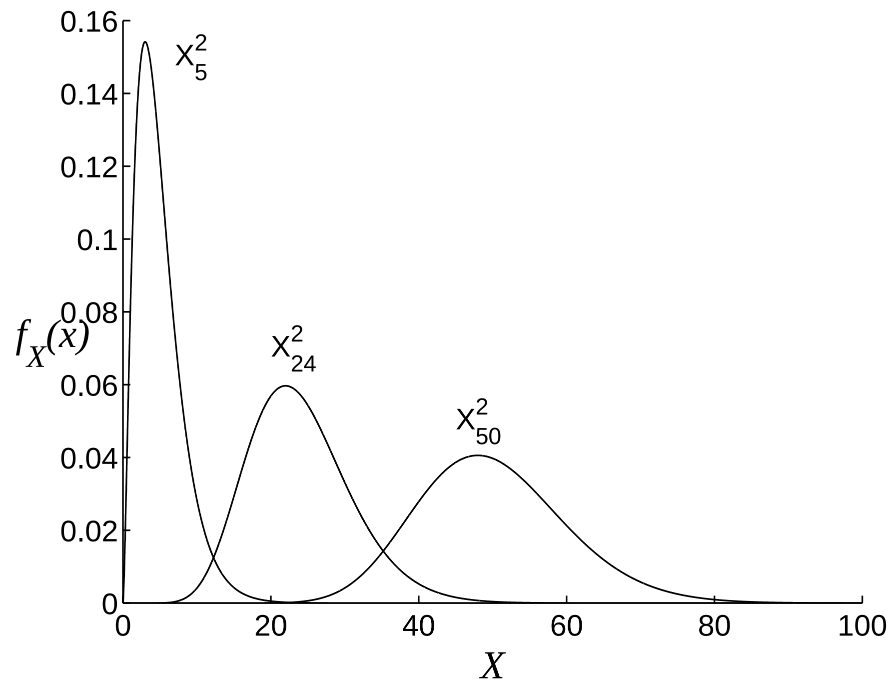
Δειγματική διασπορά
από $\{x_1, x_2, \ldots ,x_n\}$: s^2

Κατανομή εκτιμήτριας s^2

Μετασχηματίζουμε $s^2 \rightarrow \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$

και ισχύει

$$\chi^2 \equiv \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \mathrm{X}^2_{n-1}$$

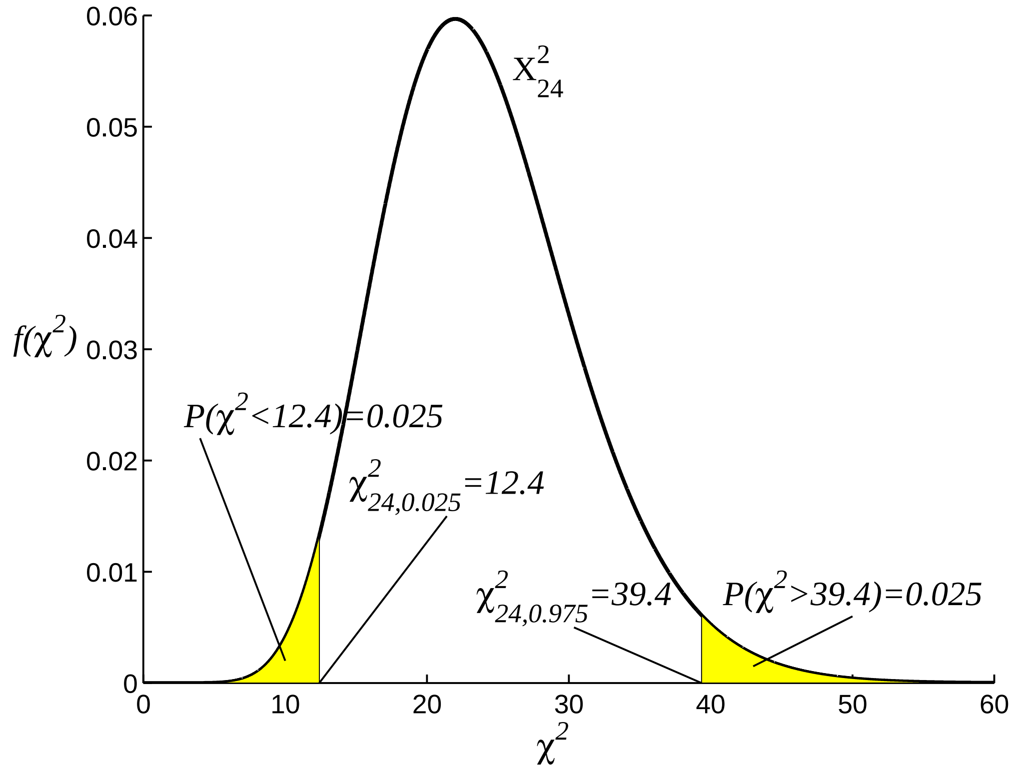


Η κατανομή X^2 δεν είναι συμμετρική ➔ δύο κρίσιμες τιμές:

αριστερή $\chi^2_{n-1,a/2}$ δεξιά $\chi^2_{n-1,1-a/2}$

$$P\left(\chi^2 < \chi^2_{n-1,\,a/2}\right) = a/2 \qquad P\left(\chi^2 < \chi^2_{n-1,1-a/2}\right) = 1 - a/2$$

$$P\left(\chi^2_{n-1,a/2} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,1-a/2}\right) = 1 - a$$



Για να βρούμε *(1-α)%* δ.ε. της σ^2 λύνουμε ως προς σ^2

$$P\left(\chi^2_{n-1,a/2} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,1-a/2} \right) = 1-a$$

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-a/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,a/2}} \right) = 1-a$$

Διασπορά
(1-α)% δ.ε. της σ^2 :

$$\boxed{\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-a/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,a/2}} \right)}$$

Τυπική απόκλιση
(1-α)% δ.ε. της σ :

$$\boxed{\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-a/2}}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,a/2}}} \right)}$$

Παράδειγμα

Για το χρόνο ανάφλεξης υλικού ταπετσαρίας υπολογίσαμε την εκτίμηση της διασποράς του χρόνου ανάφλεξης σ^2 από το δείγμα των 30 δοκιμίων και βρήκαμε

$$s^2 = 4.12\ \mathrm{s}^2 \qquad s = 2.03\mathrm{s}$$

Για επίπεδο σημαντικότητας *a=0.05*

κρίσιμες τιμές

$$\chi^2_{n-1,a/2} = \chi^2_{29,0.025} = 16.15$$

$$\chi^2_{n-1,1-a/2} = \chi^2_{29,0.975} = 45.77$$

Το 95% δ.ε. για τη διασπορά σ^2 είναι

$$\boxed{\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-a/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,a/2}} \right)} \longrightarrow \left(\frac{29 \cdot 4.12}{45.77}, \frac{29 \cdot 4.12}{16.15} \right) = (2.61, 7.40)$$

Το 95%δ.ε. για την τυπική απόκλιση σ είναι

$$\left(\sqrt{2.61}, \sqrt{7.40}\right) = (1.61, 2.72)$$