Εκτίμηση Διαστήματος Εμπιστοσύνης

διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) $[\theta_1, \theta_2]$

σε ***επίπεδο εμπιστοσύνης*** *1-α*

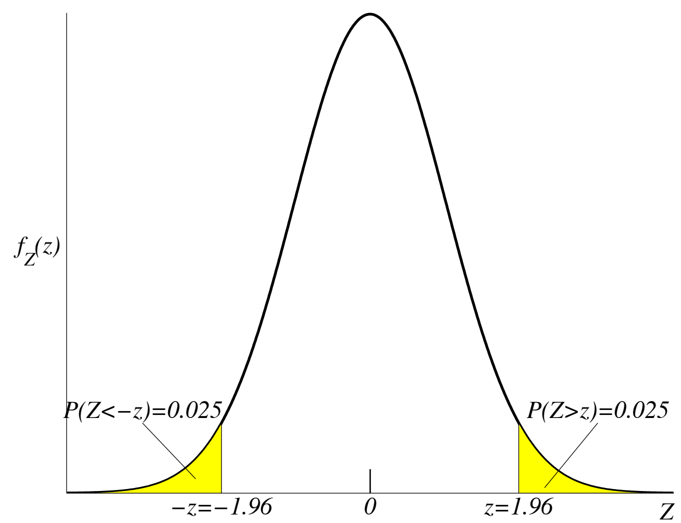
$$\mathrm{P}\big(\theta \in [\theta_1, \theta_2]\big) = 1 - a \qquad \mathrm{P}\big(\theta \notin [\theta_1, \theta_2]\big) = a$$

α: ***επίπεδο σημαντικότητας***

Ας θεωρήσουμε ως παράμετρο τη μ μιας τ.μ. X κι ας υποθέσουμε:

1. $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$
2. σ^2 γνωστό

$$z \equiv \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$



$$\mathrm{P}\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < z_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha / 2$$

$$\mathrm{P}\left(-1.96 < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < 1.96 \right) = 0.95$$

$$P\left(-1.96 < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1.96\right) = 0.95$$

$$-1.96 < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1.96$$

1. Πολλαπλασιάζουμε με $\sigma/\sqrt{n}$

$$-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x}-\mu < 1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2. Αφαιρούμε τη $\bar{x}$

$$-\bar{x}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu < -\bar{x}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

3. Πολλαπλασιάζουμε με -1

$$\underbrace{\bar{x}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

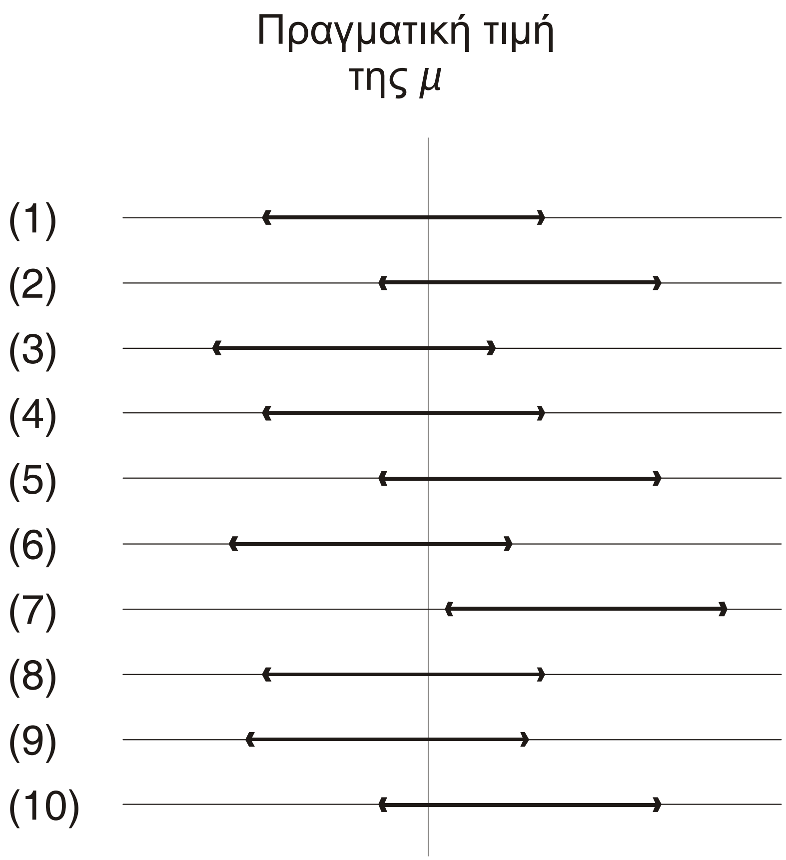
$\bar{x} \pm 1.96\cdot\sigma/\sqrt{n}$

$$P\left(\bar{x}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95.$$

95% δ.ε. της μ:

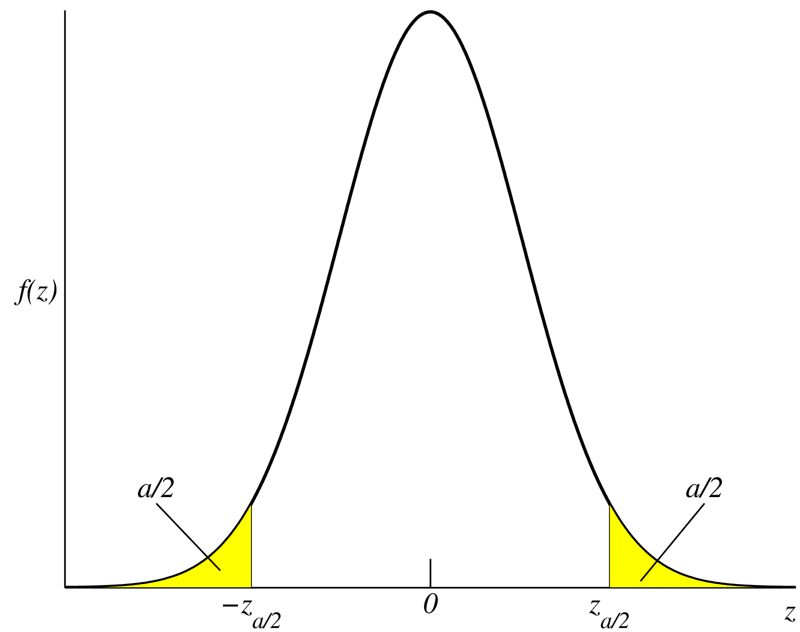
$$\boxed{\left(\bar{x}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \bar{x}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

«με πιθανότητα *0.95* το (τυχαίο) διάστημα περιέχει την πραγματική τιμή της μ»



Γενικά: επίπεδο εμπιστοσύνης *1-α*
$z_{\alpha/2}$: η *α/2 κρίσιμη τιμή της τυπικής κανονικής κατανομής*

$$a = 0.05 \Rightarrow z_{a/2} = z_{0.025} = 1.96$$



$$\mathrm{P}\left(-z_{a/2} < z < z_{a/2}\right) = \Phi(z_{a/2}) - \Phi(-z_{a/2}) = 1 - a$$

(1-α)% δ.ε. για *μ*

Συνθήκες

1. μέγεθος του δείγματος n: μεγάλο / μικρό
2. κανονική κατανομή της τ.μ. X : ναι / όχι
3. διασπορά σ^2: γνωστή / άγνωστη

Γενική μορφή

$$\bar{x} \pm (\text{κρίσιμη τιμή}) \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

Γνωστή διασπορά

$X \nsim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ **και** *n<30* $\Longrightarrow$ $\bar{x} \sim ?$

$X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ **ή** *n>30* $\Longrightarrow$ $\bar{x} \sim \mathrm{N}(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

$\Downarrow$

(1-α)% δ.ε. για μ: $\boxed{\left(\bar{x} - z_{a/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \bar{x} + z_{a/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$

Εύρος του δ.ε.: $\boxed{w = 2 \cdot z_{a/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Παράδειγμα

Χρόνος ανάφλεξης (δευτερόλεπτα) δύο υλικών ταπετσαρίας

Υλικό 1 (30 δεδομένα)

1. 52	6. 34	4. 48	4. 89	5. 56	4. 98
9. 45	7. 58	8. 4	6. 2	5. 01	6. 72
5. 09	8. 67	7. 34	7. 32	5. 98	3. 65
3. 48	3. 4	6. 89	4. 44	3. 8	2. 35
4. 16	5. 9	9. 01	3. 02	4. 5	7. 65

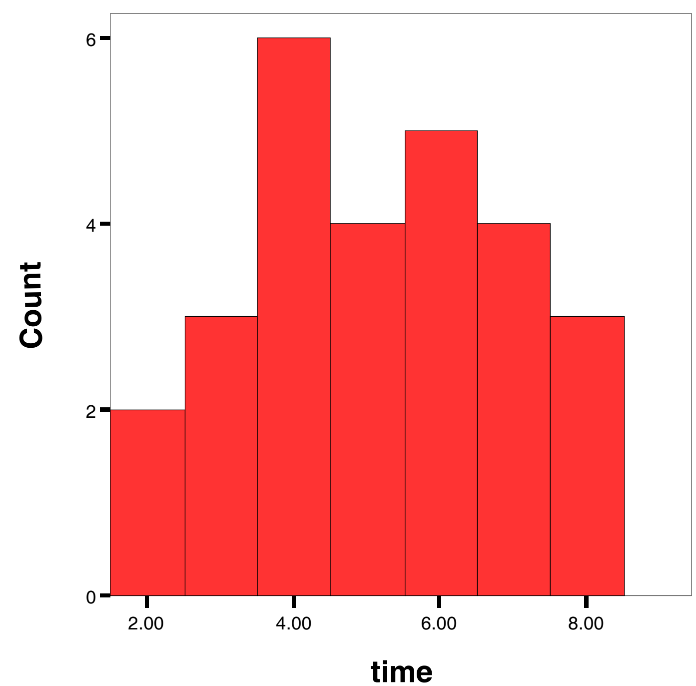
Υλικό 2 (20 δεδομένα)

2. 35	3. 56	4. 8	6. 7
4. 55	2. 88	6. 05	3. 4
3. 47	3. 45	5. 9	4. 8
7. 57	5. 6	3. 45	4. 6
1. 8	4. 6	4. 69	5

Γνωρίζουμε $\sigma = 2\text{s}$ και $\sigma^2 = 4\text{s}^2$

n=30 μικρό ή μεγάλο;

Είναι η κατανομή της τ.μ. X κανονική;



$\bar{x} = 5.59\text{s}$ $\quad \alpha=0.05 \rightarrow z_{\alpha/2}= z_{0.025}=1.96$

95% δ.ε. της μ

$$\left(\quad - \quad \cdot \frac{}{\sqrt{\quad}}, \quad + \quad \cdot \frac{}{\sqrt{\quad}} \right) = (4.88, 6.30)$$

95% δ.ε. της μ : $(4.88, 6.30)$

«Με εμπιστοσύνη σε επίπεδο 95% μπορούμε να πούμε πως ο μέσος χρόνος ανάφλεξης αυτού του υλικού ταπετσαρίας θα είναι μεταξύ 4.88s και 6.30s.»

Ξεπερνάει ο μέσος χρόνος ανάφλεξης το όριο αποδοχής

αν είναι 6s;

αν είναι 6.5s;

99% δ.ε. για τη μ;

$\alpha=0.01 \rightarrow z_{\alpha/2}= z_{0.005}=2.58$

$$\left(5.59 - \qquad \cdot \frac{2}{\sqrt{30}},\ 5.59 + \qquad \cdot \frac{2}{\sqrt{30}}\right) = (4.63, 6.53)$$

για 95% δ.ε.: εύρος w=6.30-4.88=1.42s

για 99% δ.ε.: εύρος w=6.53-4.63=1.88s

Άγνωστη διασπορά, μεγάλο *n*

$$n > 30 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{s^2}{n}\right)$$

(1-α)% δ.ε. της μ: $\boxed{\left(\bar{x} - z_{a/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{a/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$

Παράδειγμα

Άγνωστη διασπορά του χρόνου ανάφλεξης του υλικού

Ας δεχτούμε ότι το δείγμα είναι μεγάλο

Υπολογίζουμε τη δειγματική διασπορά:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = 4.12 \qquad \rightarrow \qquad s = 2.03$$

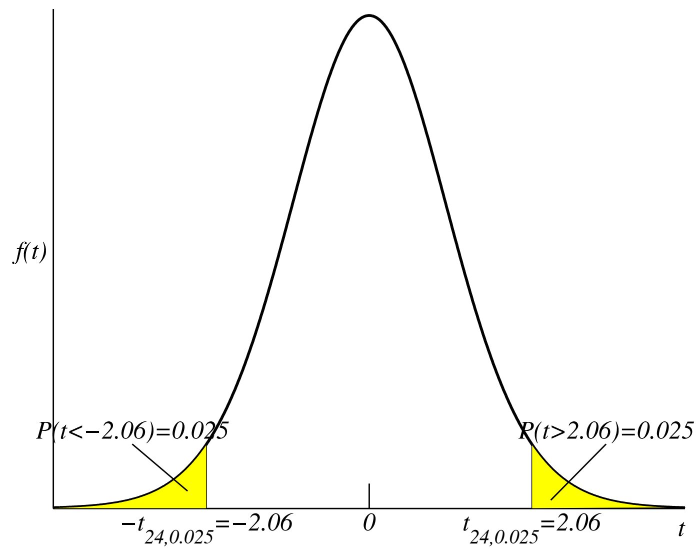
95% δ.ε.: $\left(5.59 - 1.96 \cdot \frac{}{\sqrt{30}}, 5.59 + 1.96 \cdot \frac{}{\sqrt{30}}\right) = (4.86, 6.31)$

Άγνωστη διασπορά, μικρό *n*

$$n < 30 \text{ και } X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow \quad t \equiv \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Επίπεδο σημαντικότητας: α

Κρίσιμη τιμή της t_{n-1} κατανομής: $t_{n-1,a/2}$



$(1\text{-}\alpha)\%$ δ.ε. της μ

$$\boxed{\left(\bar{x} - t_{n-1,a/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\,,\ \bar{x} + t_{n-1,a/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$$

Παράδειγμα

Άγνωστη διασπορά του χρόνου ανάφλεξης του υλικού

Ας δεχτούμε ότι το δείγμα είναι μικρό, $s = 2.03$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Βαθμοί ελευθερίας } v=n-1=29 \\ \text{Επίπεδο σημαντικότητας } \alpha=0.05\end{array}\right\} \quad \boxed{t_{n-1,a/2}= t_{29,0.025}=2.045}$$

95% δ.ε.

$$\left(5.59-2.045\cdot\frac{2.03}{\sqrt{30}},\ 5.59+2.045\cdot\frac{2.03}{\sqrt{30}}\right)=\left(4.83,6.35\right)$$

Μη κανονική κατανομή και μικρά δείγματα

μη-παραμετρική προσέγγιση
(δεν υποθέτουμε κάποια κατανομή και
τις παραμέτρους της για την εκτιμήτρια)

Διάστημα εμπιστοσύνης για μ

διασπορά	*κατανομή της X*	*n*	*κατανομή της* $\bar{x}$	*διάστημα εμπιστοσύνης*
γνωστή	*κανονική*		$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$\bar{x} \pm z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
γνωστή	*μη κανονική*	*n>30*	$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$\bar{x} \pm z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
γνωστή	*μη κανονική*	*n<30*	*μη-παραμετρική*	*μη-παραμετρικό*
άγνωστη		*n>30*	$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$\bar{x} \pm z_{a/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$
άγνωστη	*κανονική*	*n<30*	$t \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$	$\bar{x} \pm t_{n-1,a/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$
άγνωστη	*μη κανονική*	*n<30*	*μη-παραμετρική*	*μη-παραμετρικό*

Το εύρος του δ.ε. εξαρτάται από:

1. Την κατανομή και τη διασπορά σ^2 της X
2. Το μέγεθος n του δείγματος.
3. Το επίπεδο εμπιστοσύνης $1\text{-}\alpha$.

Το επίπεδο εμπιστοσύνης που συνήθως χρησιμοποιείται στην πράξη είναι *95%*.