ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}$$

ΛΥΣΗ : ΧΩΡΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ...
ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΕ ΠΛΗΡΗ Δ.Ε ...
κλπ κλπ

ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x,y)$
ΤΕΤΟΙΑ ΩΣΤΕ ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ $\rightarrow F(x,y) = C$ (ΛΥΣΗ ΣΕ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ (implicit))

Τροχιά στο επίπεδο (x,y)

ή

$$y = f(x, c')$$

ή

$$x = g(y, c'')$$

(ΛΥΣΗ ΣΕ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ) (Explicit form)

π.χ. PREDATOR-PREY MODEL

Δ.Ε. ← "Αυτόνομα" συστήματα

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x,y)$$

(Autonomous system)

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Δ.Ε $1^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ

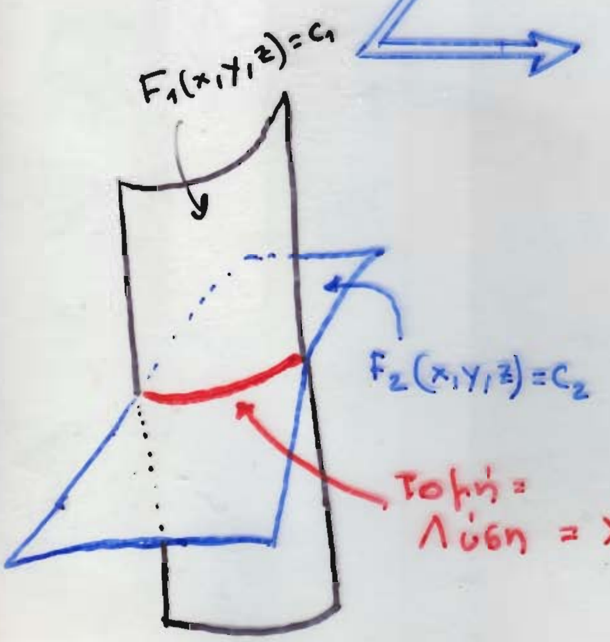
$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \left(= dt \right)$$

→ ΛΥΣΗ: Τροχιά στο χώρο (x,y,z)

⇒ "ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟ ΣΥΣΤΗΜΑ"

ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΔΥΟ "ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ" ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= c_1 \\ F_2(x,y,z) &= c_2 \end{aligned}\right\} \text{ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ}$$



Τομή = Λύση = Χαρακτηριστική καμπύλη.

Αυτόνομο σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y,z)$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x,y,z) \qquad \Rightarrow \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \; (=dt)$$

$$\frac{dz}{dt} = R(x,y,z)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Αν $F_1(x,y,z)$ και $F_2(x,y,z)$ είναι δύο ανεξάρτητα ολοκληρώματα της

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

τότε ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

είναι τάξης 2

δηλ. $\exists$ υποορίζουσα 2×2 διάφορη του μηδενός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Δ.Ε.Μ.Π.

Δ.Ε.Μ.Π. $\quad y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

Χ.Σ. $\quad \dfrac{dx}{y} = -\dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{0}$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ Χ.Σ. $\quad F_1 = z \qquad F_2 = x^2+y^2$

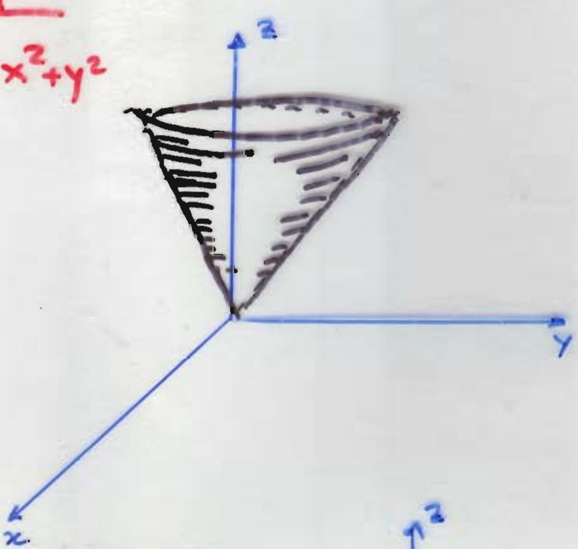
Γενική Λύση $\quad \Phi(z,\ x^2+y^2) = 0$

ή

$$z = f(x^2+y^2)$$

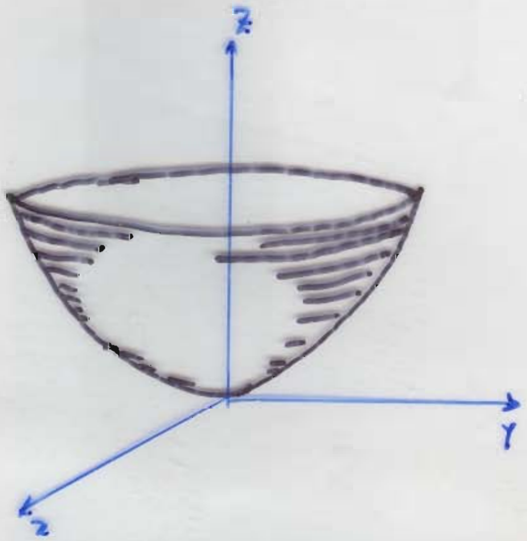
Παρ.1

$z = x^2+y^2$



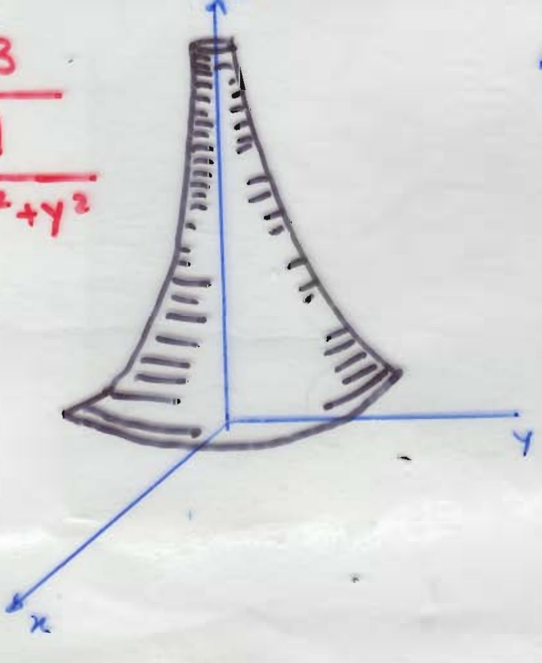
Παρ.2

$z = (x^2+y^2)^2$



Παρ.3

$z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$



Δ.Ε.Μ.Π. $\quad y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

↓

Χ.Σ. $\quad \dfrac{dx}{y} = -\dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{0}$

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= z \\ F_2 &= x^2+y^2 \end{aligned}\right\} \text{ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ}$$

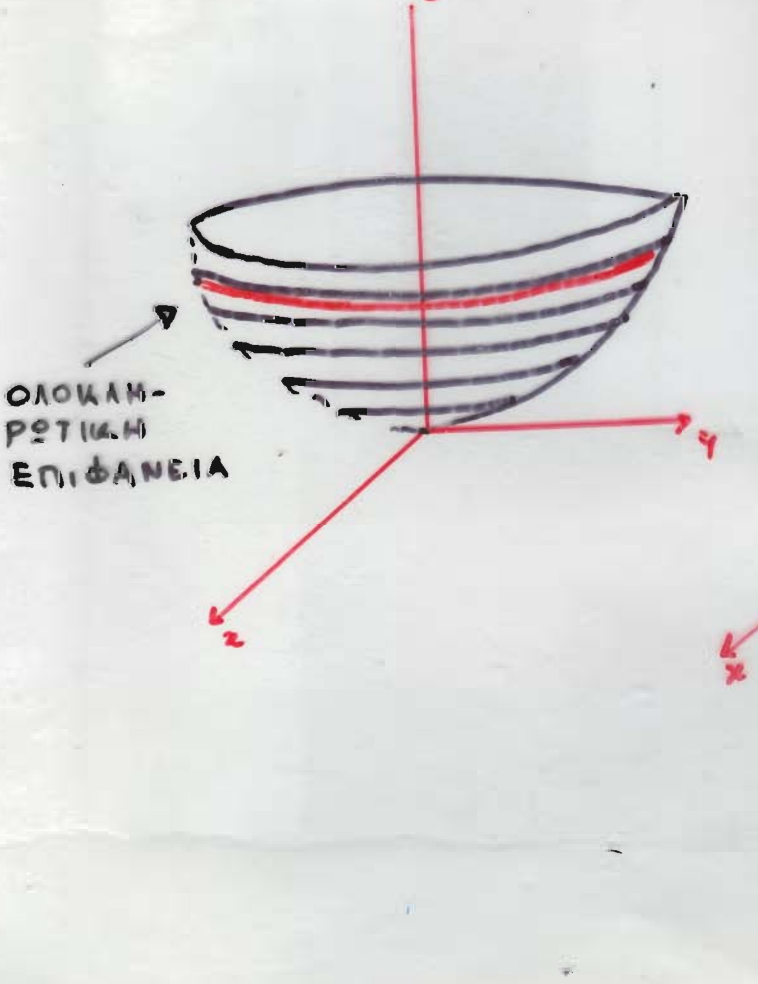
↓

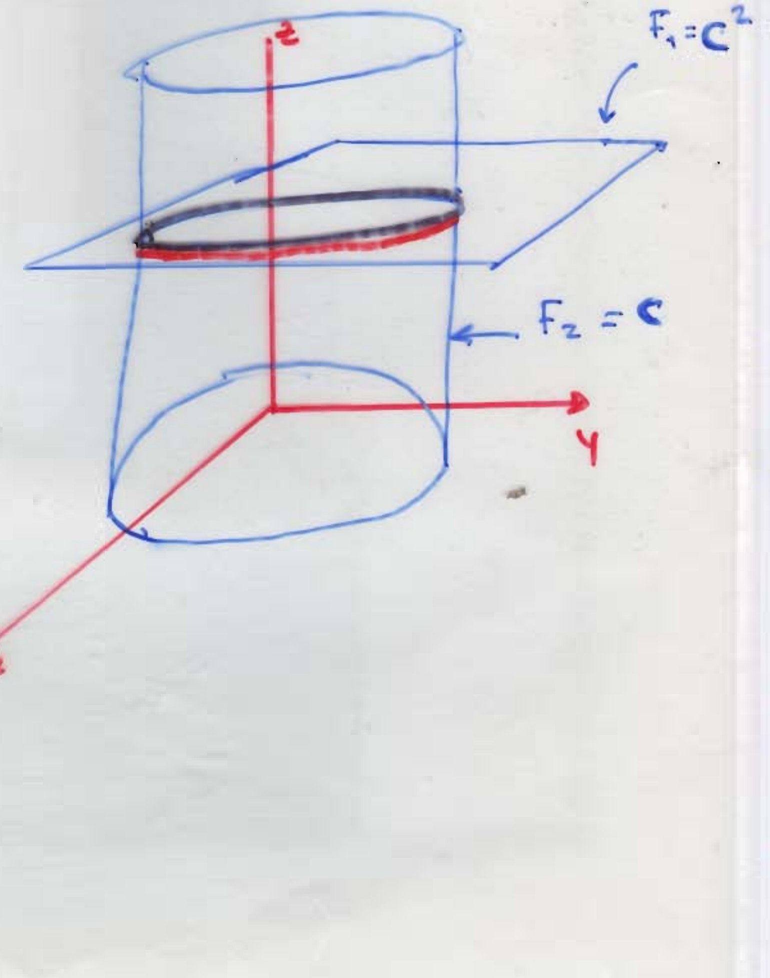
Γενική Λύση $\quad \Phi(F_1, F_2) = 0$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

<u>Παράδειγμα</u> $\quad \Phi(F_1, F_2) = F_1 - F_2^2 = 0$

$$z - (x^2+y^2)^2 = 0$$





(P.D.E)

Διαφορική εξίσωση — Μερικών Παραγώγων

ΘΕΩΡΗΜΑ Η Γενική λύση της Δ.Ε.Μ.Π.

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$$

είναι επιφάνειες της μορφής

ολοκληρωτική επιφάνεια

$$\Phi\big(F_1(x,y,z),\ F_2(x,y,z)\big)=0$$

οπου F_1, F_2 είναι ολοκληρώματα του συστήματος

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$$

Χαρακτηριστικό σύστημα

(Subsidiary system)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Σύστημα Δ.Ε.

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \quad (=\mu) \\ F_1(x,y,z) = C_1 \ , \quad F_2(x,y,z) = C_2\end{gathered}}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΙΝΗΣΗΣ

$$0 = dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz$$

$$\Big\downarrow \ dx = \mu P, \ dy = \mu Q, \ dz = \mu R$$

$$0 = \frac{\partial F_1}{\partial x} P + \frac{\partial F_1}{\partial y} Q + \frac{\partial F_1}{\partial z} R$$

$$0 = dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy + \frac{\partial F_2}{\partial z} dz$$

$$\Big\downarrow$$

$$0 = \frac{\partial F_2}{\partial x} P + \frac{\partial F_2}{\partial y} Q + \frac{\partial F_2}{\partial z} R$$

Λύνουμε ως προς P, Q

$$\boxed{\frac{P}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}} = \frac{Q}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}} = \frac{R}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}} \quad (=\nu)}$$

$$\Phi(F_1,F_2) = 0 \ , \quad z = z(x,y)$$

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_1}\cdot\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial F_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial F_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\Big\downarrow$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial F_1}{\partial y} + \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \ \rightsquigarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}}$$

$$\boxed{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & -1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}=0$$

$$\boxed{P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R}$$ Δ.Ε.Μ.Π.

"Αντίστροφο" πρόβλημα

Να βρεθεί η Δ.Ε.Μ.Π. που δέχεται σαν γενική λύση την

$$\Phi\left(F_1(x,y,z),\, F_2(x,y,z)\right)=0$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η καμπύλη $\begin{pmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{pmatrix}$ ανήκει σε κάποια ολοκληρωτική επιφάνεια $z = z(x,y)$ της Δ.Ε.Μ.Π.

$$P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} = R . \qquad ?$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ R &= \frac{\partial z}{\partial x} P + \frac{\partial z}{\partial y} Q \end{aligned}\right\} \text{γνωστά}$$

<u>Περ. 1</u> Αν

$$\frac{dz/dt}{P} = \frac{dy/dt}{Q} = \frac{dz/dt}{R}$$

Η καμπύλη είναι χαρακτηριστική καμπύλη (άρα ανήκει στην $z(x,y)$)

<u>Περ. 2</u> Αν $\dfrac{dz/dt}{P} \neq \dfrac{dy/dt}{Q}$

Μπορούμε να βρούμε τα $\partial z/\partial x$ και $\partial z/\partial y$.
η καμπύλη ανήκει στην $z = z(x,y)$

<u>Περ. 3</u> Αν $\dfrac{dz/dt}{P} = \dfrac{dy/dt}{Q}$

και

$$\frac{dz/dt}{P} \neq \frac{dz/dt}{R} \quad \text{ή} \quad \frac{dy/dt}{Q} \neq \frac{dz/dt}{R} .$$

<u>Δεν</u> μπορούμε να βρούμε τα $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$.

Η καμπύλη δεν ανήκει στην $z = z(x,y)$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ CAUCHY

Δίνεται $P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R.$

Η καμπύλη c

$c: f_1(x,y,z)=0 \quad f_2(x,y,z)=0$

σε ποιά ολοκληρωτική επιφάνεια ανήκει?

ΒΗΜΑ 1ο ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΟΥ Σ.Δ.Ε.

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

$$F_1 = F_1(x,y,z) \qquad F_2 = F_2(x,y,z)$$

ΒΗΜΑ 2ο ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΜΙΑ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ C

$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$

ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΑΝ Η ΚΑΜΠΥΛΗ C ΕΙΝΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ, ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΗ ή ΟΧΙ.

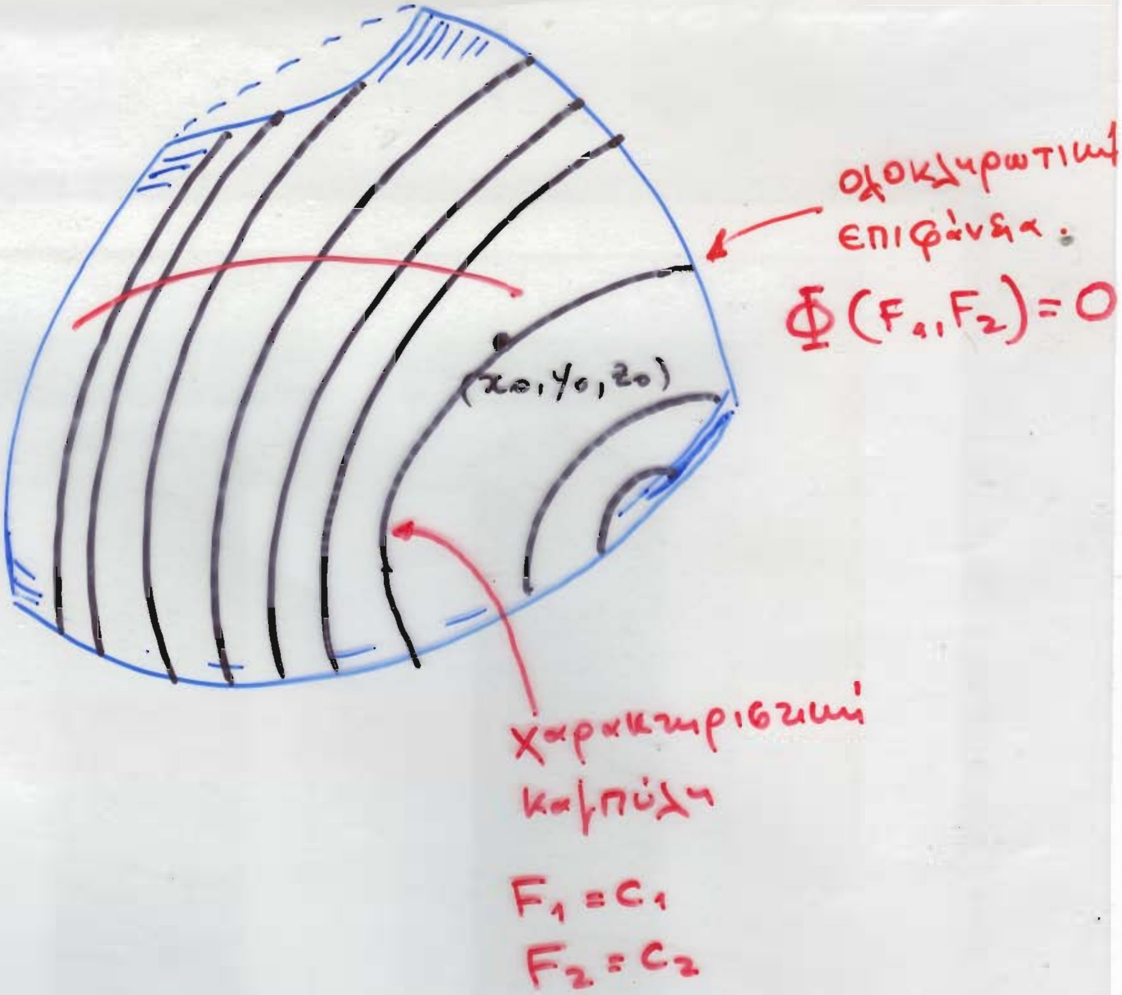
ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ 1 ΛΥΣΗ ΟΧΙ ΛΥΣΗ

ΒΗΜΑ 3ο Απο τις

$$F_1 = F_1(x,y,z)$$
$$F_2 = F_2(x,y,z)$$
$$f_1(x,y,z) = 0$$
$$f_2(x,y,z) = 0$$

ΑΠΑΛΕΙΦΟΥΜΕ ΤΑ x, y, z και ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΗΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

$$\Phi(F_1, F_2) = 0$$



"Η ολοκληρωτική επιφάνεια περιέχει χαρακτηριστικές καμπύλες"