ΠΛΗΡΗΣ Δ.Ε. (exact D.E.)

ΟΡΙΣΜΟΣ Η Δ.Ε.

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

είναι πλήρης $\Rightarrow$ $\exists\, u(x,y)$

τέτοια ώστε

$$du = P\,dx + Q\,dy \Rightarrow$$

Η γενική λύση δίνεται από τις καμπύλες

"γενικό ολοκλήρωμα" $u(x,y) = c$ = σταθερά

"ΚΡΙΤΗΡΙΟ": ΠΡΟΤΑΣΗ

Η Δ.Ε. $P\,dx + Q\,dy = 0$ είναι πλήρης $\Rightarrow$ $P_y = Q_x$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν $P_y = Q_x \Rightarrow$ Η Δ.Ε. $P\,dx + Q\,dy = 0$ είναι πλήρης και η γενική λύση δίνεται απο τον τύπο

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x',y_0)\,dx' + \int_{y_0}^{y} Q(x,y')\,dy' + c$$

ή

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x',y)\,dx' + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y')\,dy' + c$$

ή

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x',y)\,dx' + \int Q(x_0,y)\,dy$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΛΥΣΗΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΥΣ Δ.Ε.

Δίνεται η Δ.Ε. $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ και ζητάμε την λύση της:

ΒΗΜΑΤΑ:

(1) Ελέγχουμε αν η Δ.Ε. είναι πλήρης δηλ. αν

$$P_y \overset{?}{=} Q_x$$

(2) Εστω $u(x,y) = c$ η γενική λύση τότε

$$u_x = P(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + z(y)$$

οπότε

$$u_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,dx\right) + z'(y) = Q(x,y)$$

$\Rightarrow z'(y) = f(y)$ οπότε βρίσκουμε το $z(y)$.

$\Rightarrow$ ΓΙΑ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΤΗΝ ΛΥΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΜΕ ΟΠΟΙΑ ΜΕΘΟΔΟ ΘΕΛΟΥΜΕ!

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

(Integrating Factor)

ή

(Euler πολλαπλασιαστής)

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

$$P_y \neq Q_x \longleftarrow \text{όχι πλήρης}$$

Αν υπάρχει $\mu(x,y)$ τέτοια ώστε

όχι ΠΑΝΤΑ!

$$\mu P\,dx + \mu Q\,dy = 0$$

να είναι πλήρης, το $\mu(x,y)$ ολοκληρωτικός παράγοντας

και

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x$$

Αν $\mu = \mu(z)$, $z = z(x,y)$

$$(\mu P)_y = \frac{d\mu}{dz} z_y P + \mu P_y$$

$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$

$$(\mu Q)_x = \frac{d\mu}{dz} z_x Q + \mu Q_x$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{Q_x - P_y}{P z_y - Q z_x}\right) dz = f(z)\,dz \longleftarrow$$

S.O.S.

ΔΕΝ ΘΥΜΩΜΑΣΤΕ ΤΥΠΟΥΣ! ΑΛΛΑ ΤΗΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

$$\mu(z) = \exp \int f(z)\,dz$$