

**ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ**  
**ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2007**

**ΘΕΜΑ 1 ( 2 μον.).** Να βρεθεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$$

η οποία διέρχεται από το σημείο  $(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$ .

**ΘΕΜΑ 2 (1,5 μον.).** Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$\frac{y^2}{x} dx + [4y \ln(x) + 5y^2 + 3] dy = 0, \quad x > 0$$

(α). Δείξτε ότι αυτή η εξίσωση έχει ένα ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής  $\mu = \mu(y)$ .

(β). Βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης η οποία διέρχεται από το σημείο  $(x, y) = (1, 2)$ .

**ΘΕΜΑ 3 (1,5 μον.).** Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$(E) : \frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = 0$$

όπου  $a(x)$  και  $b(x)$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο κλειστό διάστημα  $I = [\alpha, \beta]$ . Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις  $\phi_1(x)$  και  $\phi_2(x)$  είναι δύο λύσεις της (E), γραμμικά ανεξάρτητες στο  $I$ . Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει σημείο  $x_0 \in I$  τέτοιο ώστε

$$\phi_1(x_0) + 3\phi_2(x_0) = 0$$

$$\phi_1'(x_0) + 3\phi_2'(x_0) = 0$$

**ΘΕΜΑ 4 (2 μον.).** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[ \tan(x) - \frac{2}{x} \right] \frac{dy}{dx} + \left[ \frac{2}{x^2} - \frac{\tan(x)}{x} \right] y = 0, \quad x > 0$$

(α). Δείξτε ότι η συνάρτηση  $y = x$  είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης.

(β). Βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης στο διάστημα  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ .

**ΘΕΜΑ 5 (1,5 μον.).** Να λυθεί με τη μέθοδο των πινάκων το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = x + z$$

$$\frac{dz}{dt} = y + z$$

**ΘΕΜΑ 6 (1,5 μον.).** Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$(E) : x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 3z, \quad \text{με } x > 0, y > 0, z > 0$$

Βρείτε τη λύση της (E) η οποία περιέχει την καμπύλη  $z = 1$  και  $y = e^{\frac{1}{x}}$ .