ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
ΙΟΥΝΙΟΣ 2007

ΘΕΜΑ 1 (2 μον.). Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = x^2y + y^2x, \text{ με } (x,y) \in [0,2] \times [0,2]$$

(α). Βρείτε ένα διάστημα για τη μεταβλητή x, στο οποίο υπάρχει μοναδική λύση $y = \phi(x)$ της παραπάνω εξίσωσης που ικανοποιεί τη συνθήκη $\phi(1) = 1$.
(β). Βρείτε τους δυο πρώτους όρους της ακολουθίας των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard για τη λύση $y = \phi(x)$.

ΘΕΜΑ 2 (1,5 μον.). Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$(y^2 + xy^3)dx + (5y^2 - xy + y^3 \sin(y))dy = 0$$

(α). Δείξτε οτι αυτή η εξίσωση έχει ένα ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(y)$.
(β). Βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης η οποία διέρχεται απο το σημείο $(x,y) = (0,1)$.

ΘΕΜΑ 3 (2 μον.). Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(E): \frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = f(x)$$

όπου οι συναρτήσεις $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.
(α). Υποθέτουμε οτι οι συναρτήσεις $u(x)$ και $v(x)$ είναι λύσεις της (E). Δείξτε οτι η συνάρτηση $u(x) - v(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(E^*): \frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = 0$$

(β). Υποθέτουμε οτι οι συναρτήσεις $\phi_1(x) = xe^x + 1$, $\phi_2(x) = e^x + 1$ και $\phi_3(x) = 1$ είναι λύσεις της (E). Βρείτε τη γενική λύση της (E).

ΘΕΜΑ 4 (1,5 μον.). Βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = \ln(x), \; x > 0$$

ΘΕΜΑ 5 (1,5 μον.). Να λυθεί το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$x_1'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t)$$
$$x_2'(t) = -x_1(t) + 6x_2(t)$$

ΘΕΜΑ 6 (1,5 μον.). Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$(E): \frac{3}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 10, \text{ με } xy \neq 0$$

Βρείτε τη λύση της (E) η οποία περιέχει την καμπύλη $z = 1$ και $x^2 + y^2 = 4$.