ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Ορισμός: Μερική παράγωγος
Αν $f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ τότε

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h} \end{aligned}}$$

Παράδειγμα: Εστω η συνάρτηση $f(x,y) = \sin(x^2 + y^3)$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos(x^2+y^3), \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2\cos(x^2+y^3)$$

$$\begin{aligned} f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 6xy^2\cos(x^2+y^3) = \\ = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = f_{yx} \end{aligned}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\cos(x^2+y^3) - 4x^2\sin(x^2+y^3)$$

$$f_x(\sqrt{\pi}, 0) \;\equiv\; \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=\sqrt{\pi}, y=0} = 2\sqrt{\pi}\cos\left((\sqrt{\pi})^2 + 0^3\right) = -2\sqrt{\pi}$$

A ένα ανοικτό σύνολο. $C^0(A)$= το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων ορισμένων πάνω στο A. C^1(A)=σύνολο των συναρτήσεων με συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους f_x, f_y. C^2(A)=σύνολο των συναρτήσεων με συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}.

Πρ. 1 $\boxed{f(x,y) \in C^2(A) \rightsquigarrow f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = f_{yx}}$

Πρ. 2 Αν f_x και f_y φραγμένες συναρτήσεις στο ανοικτό σύνολο $A \rightsquigarrow f(x,y)$ συνεχής στο A

Πρ. 2α Αν $\| \nabla f \| < M$ στο ανοικτό σύνολο $A \rightsquigarrow f(\overline{x})$ συνεχής στο A

Ορισμός $f(\overline{x})$ **διαφορίσιμη** αν

$$\lim_{\overline{x}' \to \overline{x}} \frac{f(\overline{x}') - f(\overline{x}) - \langle \overline{x}' - \overline{x}, \nabla f(\overline{x})\rangle}{\| \overline{x}' - \overline{x} \|} = 0$$

$$f(\overline{x}') - f(\overline{x}) - \left\langle \overline{x}' - \overline{x}, \nabla f(\overline{x})\right\rangle = \| \overline{x}' - \overline{x} \| \; \phi\left(\overline{x}', \overline{x}\right)$$

$$f(\overline{x}) \text{ **διαφορίσιμη** } \lim_{\overline{x}' \to \overline{x}} \phi\left(\overline{x}', \overline{x}\right) = 0$$

Πρ. 3 $f(x,y) \in C^1(A)$, A ανοικτό $\Rightarrow f(x,y)$ διαφορίσιμη

Πρ. 4 $f(x,y)$ διαφορίσιμη $\Rightarrow f(x,y) \in C^0(A)$

Ομαλό τόξο (τόξο Jordan)

$$\mathbb{R} \supset [a,b] \ni t \xrightarrow[\text{επί}]{1:1} \overline{x}(t) = (x_1(t),\, x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

$x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους.

$$\dot{\overline{x}}(t) = \frac{d}{dt}\left(\overline{x}(t)\right) = \left(x_1'(t),\, x_2'(t), \dots, x_n'(t)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{x}(t)\right) = \lim_{t' \to t} \frac{\overline{x}(t') - \overline{x}(t)}{t' - t}$$

Πρ. 5 $\boxed{\frac{d}{dt}\left(f(\overline{x}(t))\right) = \left\langle \frac{d}{dt}\overline{x}(t),\, \nabla f(\overline{x}(t)) \right\rangle}$

Διαφορικό συνάρτησης

$$\mathrm{d}f = \langle \mathrm{d}\overline{x},\, \nabla f \rangle$$

Ιδιότητες διαφορικού

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{d}\,(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{d}f + \mu \mathrm{d}g$$
$$\mathrm{d}\,(f\,g) = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f$$

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Υπάρχει $\overline{x}^*$ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το $\overline{x}$ και $\overline{y}$ τέτοιο ώστε:

$$\boxed{f(\overline{y}) - f(\overline{x}) = \langle \overline{y} - \overline{x},\, \nabla f(\overline{x}^*) \rangle}$$

Πρ. 1 $\boxed{f(x,y) \in C^2(A) \rightsquigarrow f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = f_{yx}}$

Απόδειξη: Ορίζουμε

$$\Delta_{x,h}(f\,(x,y)) = f(x+h, y) - f(x,y)$$
$$\Delta_{y,k}(f\,(x,y)) = f(x, y+k) - f(x,y)$$

Θ.Μ.Τ. $\rightsquigarrow \exists\, k_1 \,:\, |\frac{k_1}{k}| < 1$ και

$$\Delta_{y,k}(f(x,y)) = f(x, y+k) - f(x,y) = kf(x, y+k_1)$$

$$\rightsquigarrow \lim_{k \to 0} \frac{\Delta_{y,k}(f(x,y))}{k} = f_y(x,y)$$

Θ.Μ.Τ. $\rightsquigarrow \lim_{h \to 0} \Delta_{x,h}(f(x,y)) = f_x(x,y)$

$$\begin{aligned}
&\Delta_{x,h} \circ \Delta_{y,k}(f(x,y)) = \\
&= \Delta_{x,h}(f(x, y+k) - f(x,y)) = \\
&= f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta_{y,k} \circ \Delta_{x,h}(f(x,y)) = \\
&= \Delta_{x,h}(f(x+h, y) - f(x,y)) = \\
&= f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x,y)
\end{aligned}$$

$$\Delta_{x,h} \circ \Delta_{y,k}(f(x,y)) = \Delta_{y,k} \circ \Delta_{x,h}(f(x,y))$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\lim_{(k) \to 0} \frac{\Delta_{x,h} \circ \Delta_{y,k}(f(x,y))}{hk} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

$$\lim_{k \to 0} \left(\lim_{(h) \to 0} \frac{\Delta_{y,k} \circ \Delta_{x,h}(f(x,y))}{hk} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

$$\Rightarrow \; \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$