

Βασική Ανισότητα

$$m \leq f(x) \leq M \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)}$$

Ανισότητα Minkowski

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx} \leq$$
$$\leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

Λήμμα:

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι φραγμένη
σε ένα διάστημα $I = [c, d]$

$$m = \inf \{f(x), x \in I\}$$

$$M = \sup \{f(x), x \in I\}$$

↓

$$\forall u \in I \quad \forall v \in I \rightsquigarrow |f(u) - f(v)| \leq M - m$$

και

$$\sup \{|f(u) - f(v)|, u \in I, v \in I\} = M - m$$

Πρ. 13:

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$

⇓

Η $|f(x)|$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$

Πρ. 14:

Αν $f(x)$ και $g(x)$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$

⇓

Η $f(x) \cdot g(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$

Πρ. 15:

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$\inf \{|f(x)|, x \in [a, b]\} > 0$

⇓

Η $\frac{1}{f(x)}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$

Πρ. 16:

Αν $f(x)$ ολοκληρώσιμη και

$g(x)$ συνεχής στο $[a, b]$

⇓

Η $h(x) = g(f(x))$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$