Πρόταση 14α- Ανάπτυγμα Maclaurin

Αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα με ακτίνα σύγκλισης R τότε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

και

$$f^{(k)}(x) = k! \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα με ακτίνα σύγκλισης R

Αποδ. Από την πρόταση 12 έχουμε ότι

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightsquigarrow f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \rightsquigarrow f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 = 2! a_2$$

$$f^{(3)}(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} \rightsquigarrow f^{(3)}(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 = 3! a_3$$

και γενικά

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k} \rightsquigarrow f^{(k)}(0) = k \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_k = k! a_k$$

και οι διαδοχικές παράγωγοι συγκλίνουν ομοιόμορφα με ακτίνα σύγκλισης R

Πρόταση 14 β- Ανάπτυγμα Taylor

Αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα με ακτίνα σύγκλισης R, έστω $a \in (-R,\, R)$ τότε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Αποδ.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left((x-a)+a\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-a)^k a^{n-k} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (x-a)^k \left(\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n a^{n-k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} (x-a)^k$$

ΤΥΠΟΣ TAYLOR

Λήμμα

Αν $\boxed{R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1}\ f^{(n)}(t)\,dt}$

ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\Rightarrow \boxed{R_n = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}(x)}$$

Ολοκληρωτικός Τύπος TAYLOR

$f(x)$ έχει συνεχείς παραγώγους τάξης $\leq\ n$ στο $[a,\ b]$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{(k)!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x)}$$

και $\boxed{R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1}\ f^{(n)}(t)\,dt}$

Πόρισμα

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^{n-1-k}}_{\substack{\text{σταθερό}\\ \text{πρόσημο}\\ \text{για } t\\ \text{μεταξύ } x,\, x_0}} \underbrace{(x-t)^k f^{(n)}(t)}_{\text{ολοκληρώσιμη}} \, dt$$

Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής $\rightsquigarrow$ $\exists\, \xi$ μεταξύ $x,\, x_0$

$$R_n(x) = \frac{(x-\xi)^k f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} \frac{(x-x_0)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$R_n(x)$ υπόλοιπο Cauchy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{(k)!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x)$$