

Πρόταση 14α- Ανάπτυγμα Maclaurin

Αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα με ακτίνα σύγκλισης R τότε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

και

$$f^{(k)}(x) = k! \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα με ακτίνα σύγκλισης R

Πρόταση 14 β- Ανάπτυγμα Taylor

Αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα με ακτίνα σύγκλισης R , έστω $a \in (-R, R)$ τότε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

ΤΥΠΟΣ TAYLOR

Λήμμα

$$\text{Αν } R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$$

ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\Rightarrow R_n = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}(x)$$

Ολοκληρωτικός Τύπος TAYLOR

$f(x)$ έχει συνεχείς παραγώγους τάξης $\leq n$ στο $[a, b]$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{(k)!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x)$$

και $R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$

Πόρισμα

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x \underbrace{(x-t)^{n-1-k}}_{\substack{\text{σταθερό} \\ \text{πρόσημο} \\ \text{για } t \\ \text{μεταξύ } x, x_0}} \underbrace{(x-t)^k f^{(n)}(t)}_{\text{ολοκληρώσιμη}} dt$$

Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής $\rightsquigarrow \exists \xi$ μεταξύ x, x_0

$$R_n(x) = \frac{(x-\xi)^k f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} \frac{(x-x_0)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$R_n(x)$ υπόλοιπο Cauchy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{(k)!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x)$$