

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

G. B. Thomas, R. L. Finney

Απειροστικός Λογισμός,

Παν. Εκδ. Κρήτης

§4.2, 4.4, 4.8, §7.1-7.8

M. Spivak

Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός,

Παν. Εκδ. Κρήτης

Κεφ. 18

Σ. Ντούγιας

Απειροστικός Λογισμός- Τόμος Β' LEADER BOOKS, 2005

Κεφ. 1

Ε. Πουλέας

Λογισμός II

Κεφ. 2-5

Ορισμός:

$f(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα "διάστημα" I

$$I = [a, b] \text{ ή } (-\infty, b] \text{ ή } [a, \infty)$$

αόριστο ολοκλήρωμα

$$F(x) = \int f(x) dx \iff \frac{dF}{dx} = F'(x) = f(x)$$

$F(x)$ αντιπαράγωγος ή παράγουσα συνάρτηση

"Συμβολικός Λογισμός"

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \rightsquigarrow dF = \left(\frac{dF}{dx}\right) dx = f(x) dx$$

$$F = \int dF = \int \left(\frac{dF}{dx}\right) dx = \int F'(x) dx$$

Το ολοκλήρωμα "αναιρεί" την παραγωγή

$$\int x^2 dx = \boxed{\int d\left(\frac{x^3}{3}\right)} = \boxed{\frac{x^3}{3}}$$
$$\int \left(\frac{dF}{dx}\right) dx = \int dF = F$$

Θεώρημα:

Η παράγουσα συνάρτηση $F(x)$ είναι ορισμένη με προσέγγιση μιας σταθερας:

$$\begin{array}{c} F(x) \text{ παράγουσα συνάρτηση της } f(x) \\ \Downarrow \\ F(x) + c \text{ παράγουσα συνάρτηση της } f(x) \end{array}$$

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = \frac{d}{dx}(F(x) + c) = f(x)$$

Η απεικόνιση

$$\boxed{\text{συνάρτηση}} f(x) \mapsto F(x) \boxed{\text{παράγουσα συνάρτηση}} \\ \boxed{\Delta\text{ΕΝ}} \text{ είναι μονοσήμαντη}$$

πχ

$$\int x^4 dx = \int d\left(\frac{x^5}{5}\right) = \frac{x^5}{5} + c$$

όπου c οποιαδήποτε σταθερά

$$\int \cos x dx = \int d(\sin x) = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int d(\arctan x) = \arctan x + c$$

Πίνακας Ολοκληρωμάτων

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c \quad p \neq -1$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcsinh} x + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arctanh} x + c$$

για $|x| < 1$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{coth} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arccot} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh} x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = -\operatorname{arccoth} x + c$$

για $|x| > 1$