

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός

$f(x)$ "τοπικά" ολοκληρώσιμη στο (a, b) αν για κάθε κλειστό $[c, d] \subset (a, b)$ η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη.

πχ $f(x) = e^{-x}$ είναι "τοπικά" ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$
 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ είναι "τοπικά" ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$

Ορισμός

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα για μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ υπάρχει αν μπορούμε να βρούμε τα όρια για κάθε $u \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{op}}{=} \lim_{c \rightarrow a} \int_c^u f(x) dx + \lim_{d \rightarrow b} \int_u^d f(x) dx$$

πχ **ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Α' ΕΙΔΟΥΣ** $a = -\infty$ ή (και) $b = \infty$

$f(x) = e^{-x}$ είναι "τοπικά" ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_0^d e^{-x} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} (1 - e^{-d}) = 1$$

πχ **ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Β' ΕΙΔΟΥΣ** στο ένα ή και στα δύο όρια της ολοκλήρωσης η συνάρτηση δεν ορίζεται.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ είναι "τοπικά" ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} \stackrel{x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin t}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{1}{2} \cos t}{\frac{1}{2} \cos t} dt = \pi$$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ Α' ΕΙΔΟΥΣ

Θεωρούμε ολοκληρώματα το είδους $f(x)$ τοπικά ολοκληρώσιμη, $F(u) =$

$$\int_a^u f(x) dx \text{ και}$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) \equiv \int_a^{\infty} f(x) dx$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ Cauchy

Υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα \Leftrightarrow η συνάρτηση $F(u)$ ικανοποιεί μια συνθήκη Cauchy για $u \rightarrow \infty$

$$\forall \epsilon \exists R > 0 : x_2 > x_1 > R \Rightarrow |F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| < \epsilon$$

Παράδειγμα: Ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d \cos x}{x} = \frac{\cos x_1}{x_1} - \frac{\cos x_2}{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{|\cos x|}{x^2} dx \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x^2} dx \leq \frac{2}{x_1}$$

$$\forall \epsilon \exists R = \frac{2}{\epsilon} : x_2 > x_1 > R \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{x_1} < \epsilon$$

Απόλυτη σύγκλιση \Rightarrow **σύγκλιση**

$$\exists \int_a^{\infty} |f(x)| dx \Rightarrow \exists \int_a^{\infty} f(x) dx$$

Αποδ.:

$$\begin{aligned} & \exists \int_a^\infty |f(x)| dx \\ & \Downarrow \\ \forall \epsilon \exists R > 0 : x_2 > x_1 > R & \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx \right| < \epsilon \\ & \Downarrow \\ \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| & \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx \\ & \Downarrow \\ \forall \epsilon \exists R > 0 : x_2 > x_1 > R & \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| < \epsilon \Downarrow \\ & \exists \int_a^\infty f(x) dx \end{aligned}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Μπορεί να υπάρχει σύγκλιση αλλά όχι απόλυτη σύγκλιση

πχ. το $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ υπάρχει αλλά **δεν** υπάρχει το $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$

$$\int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{1 - \cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int_a^\infty \frac{dx}{x}}_{\exists} - \frac{1}{2} \underbrace{\int_a^\infty \frac{\cos 2x}{x} dx}_{\exists}$$

Κριτήριο σύγκρισης

$$\begin{aligned} & 0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{για } x > a \\ & \exists \int_a^\infty g(x) dx \Rightarrow \exists \int_a^\infty f(x) dx \\ & \nexists \int_a^\infty f(x) dx \Rightarrow \nexists \int_a^\infty g(x) dx \end{aligned}$$

Αποδ.: Η απόδειξη στηρίζεται στην σύγκλιση Cauchy και στο γεγονός ότι

$$0 \leq \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \leq \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx$$

πχ το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}} dx$ δεν υπάρχει γιατί $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}}$ και

το $\int_0^\infty \frac{1}{x+1} dx$ δεν υπάρχει.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΝΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ∞

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞ αν

$$\exists \int_a^\infty |f(x)| dx \quad \text{για κάποιο } a > 0$$

$$\boxed{|f(x)| < Cx^p e^{-x} \text{ για μεγάλα } x}$$

Αποδ.: Αν $p \leq 0$ τότε για $x > a > 1 \rightsquigarrow$

$$x^p e^{-x} < \underbrace{a^p e^{-x}}_{\text{ολοκληρώσιμη στο } [a, \infty)}$$

οπότε $\exists \int_a^\infty |f(x)| dx \leq Ca^p \int_a^\infty e^{-x} dx$

Αν $p > 0$ τότε η συνάρτηση $g(x) = x^p e^{-x/2}$ έχει μέγιστο για $x = 2p$ οπότε

$$|f(x)| < \underbrace{(2p)^p e^{-p} e^{-x/2}}_{\text{ολοκληρώσιμη στο } [a, \infty)}$$

πχ η $x^2 \sin x e^{-x}$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞

$$\boxed{|f(x)| < \frac{C}{x^q}, \quad q > 1 \text{ για μεγάλα } x}$$

Αποδ.: Η συνάρτηση $\frac{C}{x^q}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[1, \infty)$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{q-1}$$

πχ η $\frac{\sin x^5}{x^{3/2}}$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞

Οριακό κριτήριο σύγκλισης

$$0 \leq f(x) \quad \text{και} \quad 0 < g(x) \quad \text{για } x > a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \geq 0$$

$$(1) \quad 0 < \ell < \infty \rightsquigarrow \exists \int_a^\infty g(x) dx \Leftrightarrow \exists \int_a^\infty f(x) dx$$

$$(2) \quad \ell = 0 \rightsquigarrow \exists \int_a^\infty g(x) dx \Rightarrow \exists \int_a^\infty f(x) dx$$

$$(3) \quad \ell = \infty \rightsquigarrow \int_a^\infty g(x) dx = \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx = \infty$$

Αποδ.:

(1) Για μεγάλα $x > R$ έχουμε $\frac{\ell}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3\ell}{2}$ επομένως

$$\frac{\ell}{2}g(x) < f(x) \rightsquigarrow \exists \int_R^\infty f(x) dx \Rightarrow \exists \int_R^\infty g(x) dx$$

$$f(x) < \frac{3\ell}{2}g(x) \rightsquigarrow \exists \int_R^\infty g(x) dx \Rightarrow \exists \int_R^\infty f(x) dx$$

(2) Για μεγάλα $x > R$ έχουμε $\frac{f(x)}{g(x)} < \frac{1}{2}$ επομένως

$$f(x) < \frac{1}{2}g(x) \rightsquigarrow \exists \int_R^\infty g(x) dx \Rightarrow \exists \int_R^\infty f(x) dx$$

(3) Για μεγάλα $x > R$ έχουμε $1 < \frac{f(x)}{g(x)}$ επομένως

$$g(x) < f(x) \rightsquigarrow \int_R^\infty g(x) dx = \infty; \Rightarrow \int_R^\infty f(x) dx = \infty$$

πχ Αν $0 < \alpha < 2\beta - 1$ τότε $\exists \int_1^\infty \frac{x^\alpha}{(1+x^2)^\beta} dx$

Ολοκληρωτικό κριτήριο Cauchy

Αν $f(x) > 0$ συνεχής και φθίνουσα στο $[m, \infty)$ τότε

$$\exists \int_m^\infty f(x) dx \Leftrightarrow \sum_{k \geq m}^\infty f(k) < \infty$$

Αποδ.: $f(x) > 0$ συνεχής και φθίνουσα \rightsquigarrow

$$k < x < k+1 \Rightarrow \underbrace{f(k+1)}_{= \ell} \leq f(x) \leq f(k) \Rightarrow \sum_{\ell=q+1}^{\ell=p+1} f(\ell) \leq \int_q^p f(x) dx \leq \sum_{k=q}^{k=p} f(k)$$

Οπότε αν $S_n = \sum_{k=m}^{k=n} f(k)$ Cauchy τότε $F(x) = \int_m^x f(t) dt$ Cauchy και αντίστροφα.

πχ. Η $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$ συγκλίνει για $s > 1$ γιατί το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx$ υπάρχει.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Β' ΕΙΔΟΥΣ

Ορισμός

$f(x)$ "τοπικά" ολοκληρώσιμη στο (a, b) αν για κάθε κλειστό $[c, d] \subset (a, b)$ η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη.

πχ $f(x) = e^{-x}$ είναι "τοπικά" ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$
 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ είναι "τοπικά" ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$

Ορισμός

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα για μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ υπάρχει αν μπορούμε να βρούμε τα όρια για κάθε $u \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{op}}{\equiv} \lim_{c \rightarrow a} \int_c^u f(x) dx + \lim_{d \rightarrow b} \int_u^d f(x) dx$$

πχ **ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Α' ΕΙΔΟΥΣ** $a = -\infty$ ή (και) $b = \infty$

$f(x) = e^{-x}$ είναι "τοπικά" ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_0^d e^{-x} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} (1 - e^{-d}) = 1$$

πχ **ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Β' ΕΙΔΟΥΣ** στο ένα ή και στα δύο όρια της ολοκλήρωσης η συνάρτηση δεν ορίζεται.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ είναι "τοπικά" ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} \stackrel{x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin t}{=} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{1}{2} \cos t}{\frac{1}{2} \cos t} dt = \pi$$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ Β' ΕΙΔΟΥΣ

Θεωρούμε ολοκληρώματα το είδους $f(x)$ τοπικά ολοκληρώσιμη, $F(u) =$

$$\int_a^u f(x) dx \text{ και } \exists \lim_{u \rightarrow b} F(u) \equiv \int_a^b f(x) dx \text{ (ή } F(u) = \int_a^b f(x) dx \text{ και}$$

$$\exists \lim_{u \rightarrow a} F(u) \equiv \int_a^b f(x) dx)$$

Παράδειγμα: Ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$

$$F(u) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = 2(1 - \sqrt{1-u}) \text{ και } \lim_{u \rightarrow 1} F(u) = 2$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ Cauchy

Υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα \Leftrightarrow η συνάρτηση $F(u)$ ικανοποιεί μια συνθήκη Cauchy για $u \rightarrow b$

$$\forall \epsilon \exists \delta > 0 : |x_2 - b| < \delta \text{ και } |x_1 - b| < \delta \Rightarrow |F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| < \epsilon$$

Απόλυτη σύγκλιση \Rightarrow **σύγκλιση**

$$\exists \int_a^b |f(x)| dx \Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx$$

Αποδ.:

$$\begin{aligned} & \exists \int_a^b |f(x)| dx \\ & \quad \Downarrow \\ \forall \epsilon \exists \delta > 0 : |x_2 - b| < \delta \quad \text{και} \quad |x_1 - b| < \delta; & \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx \right| < \epsilon \\ & \quad \Downarrow \\ \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| & \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx \\ & \quad \Downarrow \\ \forall \epsilon \exists \delta > 0 : |x_2 - b| < \delta \quad \text{και} \quad |x_1 - b| < \delta; & \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| < \epsilon \\ & \quad \Downarrow \\ & \exists \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Μπορεί να υπάρχει σύγκλιση αλλά όχι απόλυτη σύγκλιση
Κριτήριο σύγκρισης

$$\begin{aligned} 0 & \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{για} \quad x > a \\ \exists \int_a^b g(x) dx & \Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx \\ \nexists \int_a^b f(x) dx & \Rightarrow \nexists \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

Αποδ.: Η απόδειξη στηρίζεται στην σύγκλιση Cauchy και στο γεγονός ότι

$$0 \leq \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \leq \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx$$

πχ το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ δεν υπάρχει γιατί $\sin x < x$ για $0 < x < 1$
και $\frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$ και το $\int_0^\infty \frac{dx}{x}$ δεν υπάρχει.

~~ **ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΝΟΝΤΑΙ ΣΤΟ** a

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη για $x > a > 0$ αν

$$\exists \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{για} \quad \text{κάποιο} \quad b > a$$

$$\boxed{|f(x)| < \frac{C}{(x-a)^p} \quad \text{και} \quad 0 \leq p < 1 \quad \text{για} \quad b \geq x \geq a \Rightarrow f(x) \text{ ολοκληρώσιμη}}$$

Αποδ.: Αν $1 > p \geq 0$ τότε για $u > a$ ~

$$F(u) = \int_u^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{(x-a)^{1-p}}{1-p} \Big|_u^b = \frac{(b-a)^{1-p} - (u-a)^{1-p}}{1-p} \xrightarrow{u \rightarrow a} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$$

γιατί $1-p > 0$ οπότε η $\frac{C}{(x-a)^p}$ είναι ολοκληρώσιμη στο a οπότε $\exists \int_a^b |f(x)| dx \leq$

$C \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$ πχ η $\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ είναι ολοκληρώσιμη στο 0

Οριακό κριτήριο σύγκλισης

$$0 \leq f(x) \quad \text{και} \quad 0 < g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \geq 0$$

$$(1) \quad 0 < \ell < \infty \quad \rightsquigarrow \quad \exists \int_a^b g(x) dx \Leftrightarrow \exists \int_a^b f(x) dx$$

$$(2) \quad \ell = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \exists \int_a^b g(x) dx \Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx$$

Αποδ.:

(1) Για μεγάλα x κοντά στο a έχουμε $\frac{\ell}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3\ell}{2}$ επομένως

$$\frac{\ell}{2} g(x) < f(x) \rightsquigarrow \exists \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \exists \int_a^b g(x) dx$$

$$f(x) < \frac{3\ell}{2} g(x) \rightsquigarrow \exists \int_a^b g(x) dx \Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx$$

(2) Για x κοντά στο a έχουμε $\frac{f(x)}{g(x)} < \frac{1}{2}$ επομένως

$$f(x) < \frac{1}{2} g(x) \rightsquigarrow \exists \int_a^b g(x) dx \Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx$$

πχ Αν $0 < \beta \leq \alpha + 1$ τότε $\exists \int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sin^\beta x} dx$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκηση 1: $\int_{-4}^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}} = \pi$

Ασκηση 2: $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arccosh} 2$