ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ Β΄ ΕΙΔΟΥΣ

Θεωρούμε ολοκληρώματα το είδους $f(x)$ τοπικά ολοκληρώσιμη,

$$F(u) = \int_a^u f(x)\,dx \text{ και } \exists \lim_{u\to b} F(u) \equiv \int_a^b f(x)\,dx$$

$$(\text{ή } F(u) = \int_u^b f(x)\,dx \text{ και } \exists \lim_{u\to a} F(u) \equiv \int_a^b f(x)\,dx)$$

Παράδειγμα: Ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$

$$F(u) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2\left(1-\sqrt{1-u}\right)$$

$$\text{και} \quad \lim_{u\to 1} F(u) = 2$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ Cauchy

Υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\Leftrightarrow$ η συνάρτηση $F(u)$ ικανοποιεί μια συνθήκη Cauchy για $u \to b$

$$\forall \epsilon \, \exists \delta > 0 \; : \; |x_2 - b| < \delta \quad \text{και} \quad |x_1 - b| < \delta$$

$$\Rightarrow \; |F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| < \epsilon$$

Απόλυτη σύγκλιση $\Rightarrow$ **σύγκλιση**

$$\exists \int_a^b |f(x)| \, dx \; \Rightarrow \; \exists \int_a^b f(x)\, dx$$

Κριτήριο σύγκρισης

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\exists \int\limits_a^b g(x)\,dx \;\Rightarrow\; \exists \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

$$\nexists \int\limits_a^b f(x)\,dx \;\Rightarrow\; \nexists \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

πχ το ολοκλήρωμα $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ δεν υπάρχει.

$\rightsquigarrow$ **ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΝΟΝΤΑΙ ΣΤΟ a**

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη για $x > a > 0$ αν

$$\exists \int_a^b |f(x)|dx \quad \text{για κάποιο } b > a$$

$$\boxed{|f(x)| < \frac{C}{(x-a)^p} \text{ και } 0 \leq p < 1 \text{ για } b \geq x \geq a \Rightarrow f(x) \text{ ολοκληρώσιμη}}$$

πχ η $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$ είναι ολοκληρώσιμη στο 0

Οριακό κριτήριο σύγκλισης

$$0 \leq f(x) \quad \text{και} \quad 0 < g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \geq 0$$

1. $0 < \ell < \infty \rightsquigarrow \exists \int_a^b g(x)\,dx \Leftrightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$
2. $\ell = 0 \rightsquigarrow \exists \int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$