Θεωρήματα Μέσης Τιμής

(1) $a > 0,\quad \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n+a}}^{\frac{1}{n}} \underbrace{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}_{f(x)} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x)}\, dx = \lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n) \int\limits_{\frac{1}{n+a}}^{\frac{1}{n}} g(x)\, dx = a,\quad \xi_n \in [\frac{1}{n+a}, \frac{1}{n}]$

(2) $f(x)$ συνεχής γύρω από το 0, $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{(n+a)^2}}^{\frac{1}{n^2}} \frac{f(x)}{x^{3/2}}\, dx = 2af(0)$

(3) **¨συνάρτηση δέλτα¨**
$f(x)$ συνεχής γύρω από το 0, $D_n(x) \geq 0$ και $D_n(x) = 0$ όταν $x \notin \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ και $\int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} D_n(x)\, dx = 1$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} D_n(x) f(x)\, dx = f(0)$

(4) **Θεώρημα Bonnet**
$f(x) \geq 0,\ f(a) \neq 0$ και φθίνουσα στο $[a, b]$ ($\rightsquigarrow$ ολοκληρώσιμη),
$g(x)$ ολοκληρώσιμη και σταθερού προσήμου, τότε

$$\exists \xi \in [a, b]\ :\ \int\limits_a^b f(x)g(x)\, dx = f(a) \int\limits_a^\xi g(x)\, dx$$

(5) $f(a) > a > 0$ και $\int\limits_a^b f(x)\, dx < \frac{b^2-a^2}{2}$ τότε $\exists \xi \in [a, b]\ :\ f(\xi) = \xi$

(Σημ: Θέτουμε $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$)

(6) $f(x),\ g(x)$ συνεχείς για $x \in [0, 1]$ και $f(x) > 0,\ g(x) < 0$ τότε $\exists \xi \in [0, 1]\ :\ \int\limits_0^\xi f(x)dx + \int\limits_1^\xi g(x)dx = 0$

(7) $\exists f''(x)$ και $f(a) = f(b) = k$ και $\int\limits_a^b f(x)dx = k(b - a)$ τότε η $f'(x)$ έχει δύο ρίζες και $\exists \xi \in (a, b)\ :\ f''(\xi) = 0$

(8) $f(x)$ συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) > 0$ και $\int\limits_a^b f(x)dx < 0$ τότε (α) $\exists c \in (a, b)\ :\ f(c) = 0$ και $\exists \xi \in (a, b)\ :\ \int\limits_a^\xi f(x)dx = 0$

(9) $\frac{\pi^2}{9} < \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{f(x)} \underbrace{x}_{g(x)}\, dx < \frac{2\pi^2}{9}$ (Απόδειξη Θ.Μ.Τιμής)

(10) $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4 - x^2 + x^3}} < \dfrac{\pi}{6}$ (Απόδειξη με ανισότητες συναρτήσεων)

(11) (α') $f(x)$ συνεχής και $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0 \rightsquigarrow \exists\, \xi \in (a, b) \ : \ f(\xi) = 0$

(β') $f(x),\ g(x)$ συνεχής και $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx \rightsquigarrow \exists\, \xi \in (a, b) \ : \ f(\xi) = g(\xi)$