Οριακό κριτήριο σύγκλισης

$$0 \leq f(x) \quad \text{και} \quad 0 < g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \geq 0$$

1. $0 < \ell < \infty \quad \rightsquigarrow \quad \exists \int\limits_a^\infty g(x)\,dx \Leftrightarrow \exists \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$
2. $\ell = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \exists \int\limits_a^\infty g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$
3. $\ell = \infty \quad \rightsquigarrow \quad \int\limits_a^\infty g(x)\,dx = \infty \Rightarrow \int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \infty$

πχ Αν $0 < \alpha < 2\beta - 1$ τότε $\exists \int_1^\infty \frac{x^\alpha}{(1+x^2)^\beta}\,dx$

Οριακό κριτήριο σύγκλισης

$$0 \le f(x) \quad \text{και} \quad 0 < g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \ge 0$$

1. $0 < \ell < \infty \rightsquigarrow \exists \int_a^\infty g(x)\,dx \Leftrightarrow \exists \int_a^\infty f(x)\,dx$
2. $\ell = 0 \rightsquigarrow \exists \int_a^\infty g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_a^\infty f(x)\,dx$
3. $\ell = \infty \rightsquigarrow \int_a^\infty g(x)\,dx = \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx = \infty$

Απόδειξη.

1. Για μεγάλα $x > R$ έχουμε $\frac{\ell}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3\ell}{2}$ επομένως

$$\frac{\ell}{2} g(x) < f(x) \rightsquigarrow \exists \int_R^\infty f(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_R^\infty g(x)\,dx$$

$$f(x) < \frac{3\ell}{2} g(x) \rightsquigarrow \exists \int_R^\infty g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_R^\infty f(x)\,dx$$

2. Για μεγάλα $x > R$ έχουμε $\frac{f(x)}{g(x)} < \frac{1}{2}$ επομένως

$$f(x) < \frac{1}{2} g(x) \rightsquigarrow \exists \int_R^\infty g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_R^\infty f(x)\,dx$$

3. Για μεγάλα $x > R$ έχουμε $1 < \frac{f(x)}{g(x)}$ επομένως

$$g(x) < f(x) \rightsquigarrow \int_R^\infty g(x)\,dx = \infty; \Rightarrow \int_R^\infty f(x)\,dx = \infty$$

$\square$

Ολοκληρωτικό κριτήριο Cauchy

Αν $f(x) > 0$ συνεχής και φθίνουσα στο $[m, \infty)$ τότε

$$\exists \int_m^\infty f(x)\,dx \Leftrightarrow \sum_{k \geq m}^{\infty} f(k) < \infty$$

πχ. Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ συγκλίνει για $s > 1$ γιατί το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx$ υπάρχει.

Ολοκληρωτικό κριτήριο Cauchy

Αν $f(x) > 0$ συνεχής και φθίνουσα στο $[m, \infty)$ τότε

$$\exists \int_m^\infty f(x)\,dx \Leftrightarrow \sum_{k \geq m}^{\infty} f(k) < \infty$$

Απόδειξη.

$f(x) > 0$ συνεχής και φθίνουσα $\rightsquigarrow$

$$k < x < k+1 \Rightarrow f(\underbrace{k+1}_{=\ell}) \leq f(x) \leq f(k)$$

$$\Rightarrow \sum_{\ell=q+1}^{\ell=p+1} f(\ell) \leq \int_q^p f(x)\,dx \leq \sum_{k=q}^{k=p} f(k)$$

Οπότε αν $S_n = \sum\limits_{k=m}^{k=n} f(k)$ Cauchy τότε $F(x) = \int\limits_m^x f(t)\,dt$ Cauchy και αντίστροφα. $\square$