ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμός

$f(x)$ $\boxed{\text{¨τοπικά' ολοκληρώσιμη}}$ στο $(a,\ b)$ $\boxed{\text{αν}}$ για κάθε κλειστό $[c,\ d] \subset (a,\ b)$ η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη.

πχ $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ είναι <u>τοπικά</u> ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ είναι <u>τοπικά</u> ολοκληρώσιμη στο $(0,1)$

Ορισμός

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα για μια τοπικά ολκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ υπάρχει αν μπορούμε να βρούμε τα όρια για κάθε $u \in (a, , b)$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \overset{\text{ορ}}{\equiv} \lim_{c\to a} \int\limits_c^u f(x)\,dx + \lim_{d\to b} \int\limits_u^d f(x)\,dx$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Α′ ΕΙΔΟΥΣ $a = -\infty$ ή (και) $b = \infty$

$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ είναι ¨τοπικά' ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim_{d\to\infty} \int_0^d \mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim_{d\to\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-d}\right) = 1$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Β′ ΕΙΔΟΥΣ στο ένα ή και στα δύο όρια της ολοκλήρωσης η συνάρτηση δεν ορίζεται.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ είναι ¨τοπικά' ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} \overbrace{=}^{x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin\,t} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{1}{2}\cos\,t}{\frac{1}{2}\cos\,t}\,dt = \pi$$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ Α′ ΕΙΔΟΥΣ

Θεωρούμε ολοκληρώματα του είδους: $f(x)$ τοπικά ολοκληρώριμη,

$$F(u) = \int_a^u f(x)\,dx \text{ και } \lim_{u\to\infty} F(u) \equiv \int_a^\infty f(x)\,dx$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ Cauchy

Υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\Leftrightarrow$ η συνάρτηση $F(u)$ ικανοποιεί μια συνθήκη Cauchy για $u \to \infty$

$$\forall \epsilon\, \exists R > 0 \,:\, x_2 > x_1 > R \;\Rightarrow\; |F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| < \epsilon$$

Παράδειγμα: Το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ υπάρχει

Παράδειγμα

Το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ υπάρχει

Απόδειξη.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\cos x}{x} = \frac{\cos x_1}{x_1} - \frac{\cos x_2}{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{|\cos x|}{x^2}\, dx \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x^2}\, dx \leq \frac{2}{x_1}$$

$$\forall \epsilon\, \exists R = \frac{2}{\epsilon} \,:\, x_2 > x_1 > R \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leq \frac{2}{x_1} < \epsilon$$

$\square$

Απόλυτη σύγκλιση $\Rightarrow$ Απλή σύγκλιση

$$\exists \int_a^{\infty} |f(x)|\, dx \Rightarrow \exists \int_a^{\infty} f(x)\, dx$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Μπορεί να υπάρχει σύγκλιση αλλά όχι απόλυτη σύγκλιση

πχ. το $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ υπάρχει αλλά **δεν** υπάρχει το $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$

$$\int_a^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \int_a^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$$

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\int_a^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int_a^{\infty} \frac{dx}{x}}_{\nexists} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_a^{\infty} \frac{\cos 2x}{x}\, dx}_{\exists}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΝΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ∞

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞ αν

$$\exists \int_a^\infty |f(x)|dx \quad \text{για κάποιο } a > 0$$

$|f(x)| < Cx^p \mathrm{e}^{-x}$ για μεγάλα $x \Rightarrow$ Η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη

πχ η $x^2 \sin x \mathrm{e}^{-x}$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞

$|f(x)| < \frac{C}{x^q}, \quad q > 1$ για μεγάλα $x \Rightarrow$ Η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη

πχ η $\frac{\sin x^5}{x^{3/2}}$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞

Απόλυτη σύγκλιση $\Rightarrow$ Απλή σύγκλιση

$$\exists \int_a^{\infty} |f(x)|\, dx \;\Rightarrow\; \exists \int_a^{\infty} f(x)\, dx$$

Απόδειξη.

$$\exists \int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon\, \exists R > 0 \;:\; x_2 > x_1 > R \;\Rightarrow\; \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\, dx \right| < \epsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\, dx$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \epsilon\, \exists R > 0 \;:\; x_2 > x_1 > R \;\Rightarrow\; \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| < \epsilon \Downarrow$$

$$\exists \int_a^{\infty} f(x)\, dx$$

$\square$

ΠΡΟΣΟΧΗ Μπορεί να υπάρχει σύγκλιση αλλά όχι απόλυτη σύγκλιση

πχ. το $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ υπάρχει αλλά **δεν** υπάρχει το $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$

$$\int_a^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \int_a^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\int_a^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{x}\, dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int_a^{\infty} \frac{dx}{x}}_{\nexists} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_a^{\infty} \frac{\cos 2x}{x}\, dx}_{\exists}$$

Κριτήριο σύγκρισης

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{για} \quad x > a$$

$$\exists \int_a^\infty g(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_a^\infty f(x)\,dx$$

$$\nexists \int_a^\infty f(x)\,dx \Rightarrow \nexists \int_a^\infty g(x)\,dx$$

Απόδειξη.

Η απόδειξη στηρίζεται στην σύγκλιση Cauchy και στο γεγονός ότι

$$0 \leq \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \leq \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx$$

πχ το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}}dx$ δεν υπάρχει γιατί $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}}$ και το $\int_0^\infty \frac{1}{x+1}dx$ δεν υπάρχει. $\square$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΝΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ∞

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞ αν

$$\exists \int_a^\infty |f(x)|dx \quad \text{για κάποιο } a > 0$$

$|f(x)| < Cx^p \mathrm{e}^{-x}$ για μεγάλα x

Απόδειξη.

Αν $p \leq 0$ τότε για $x > a > 1 \rightsquigarrow$

$$x^p \mathrm{e}^{-x} < \underbrace{a^p \mathrm{e}^{-x}}_{\text{ολοκληρώσιμη στο } [a,\infty)}$$

οπότε $\exists \int_a^\infty |f(x)|dx \leq Ca^p \int_a^\infty \mathrm{e}^{-x}dx$ Αν $p > 0$ τότε η συνάρτηση $g(x) = x^p \mathrm{e}^{-x/2}$ έχει μέγιστο για $x = 2p$ οπότε

$$|f(x)| < \underbrace{(2p)^p \mathrm{e}^{-p} \mathrm{e}^{-x/2}}_{\text{ολοκληρώσιμη στο } [a,\infty)}$$

$\square$

πχ η $x^2 \sin x \mathrm{e}^{-x}$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞

$|f(x)| < \frac{C}{x^q}, \quad q > 1$ για μεγάλα x

Απόδειξη.

Η συνάρτηση $\frac{C}{x^q}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[1, \infty)$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{q-1}$$

$\square$

πχ η $\frac{\sin x^5}{x^{3/2}}$ είναι ολοκληρώσιμη στο ∞