

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Πρ. 20a

Αν $f(x)$ φραγμένη στο $[a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$

και $g(x)$ ολοκληρώσιμη με σταθερό πρόσημο

και $f(x)g(x)$ ολοκληρώσιμη

$$\Downarrow$$
$$\exists \mu \in [m, M] \rightsquigarrow \int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$$

Πρ. 20b: Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής

Αν $f(x)$ συνεχής στο $[a, b]$

και $g(x)$ ολοκληρώσιμη

με σταθερό πρόσημο

\rightsquigarrow $f(x)g(x)$
ολοκληρώσιμη

$$\Downarrow$$
$$\exists \xi \in [a, b] \rightsquigarrow \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

Πόρισμα

$$\text{Αν } f(x) \text{ συνεχής στο } [a, b] \exists \xi \in [a, b] \rightsquigarrow \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

Πρ. 20c

Αν $f(x)$ μονότονη **και** $g(x)$ ολοκληρώσιμη με σταθερό πρόσημο



$$\exists \xi \in [a, b] \rightsquigarrow \int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx$$

Πρ. 20c': Δεύτερο Θεώρημα Μέσης Τιμής

Αν $f(x)$ μονότονη συνεχής **και** $\exists f'(x)$

και $g(x)$ συνεχής



$$\exists \xi \in [a, b] \rightsquigarrow \int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Πρ. 20a

Αν $f(x)$ φραγμένη στο $[a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$

ΚΑΙ $g(x)$ ολοκληρώσιμη με σταθερό πρόσημο

ΚΑΙ $f(x)g(x)$ ολοκληρώσιμη

↓

$$\exists \mu \in [m, M] \rightsquigarrow \int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$$

Απόδειξη.

Εστω $g(x) \geq 0$ $m \leq f(x) \leq M \rightsquigarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$

(Σημ. αν $\int_a^b g(x) dx = 0 \rightsquigarrow \int_a^b f(x)g(x) dx = 0$)

Εστω $\int_a^b g(x) dx \neq 0$ τότε

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \mu \leq M$$

(Αν $g(x) \leq 0 \rightsquigarrow -g(x) \geq 0$ και εργαζόμαστε όπως προηγούμενα)

Πρ. 20b: Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής

Αν $f(x)$ συνεχής στο $[a, b]$

ΚΑΙ $g(x)$ ολοκληρώσιμη

με σταθερό πρόσημο

$\rightsquigarrow f(x)g(x)$
ολοκληρώσιμη

↓

$$\exists \xi \in [a, b] \rightsquigarrow \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

Απόδειξη.

Αφού η $f(x)$ είναι συνεχής, αν

$$m = \inf f(x), \quad M = \sup f(x), \quad \text{για } x \in [a, b]$$

τότε $\exists \xi : f(\xi) = \mu$ όπου μ ορίστηκε στην προηγούμενη πρόταση.

Πόρισμα

$$\text{Αν } f(x) \text{ συνεχής στο } [a, b] \exists \xi \in [a, b] \rightsquigarrow \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

Απόδειξη.

θέτουμε $g(x) = 1$ στην προηγούμενη πρόταση.

Πρ. 20c

Αν $f(x)$ μονότονη **και** $g(x)$ ολοκληρώσιμη με σταθερό πρόσημο

↓

$$\exists \xi \in [a, b] \rightsquigarrow \int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx$$

Απόδειξη

Υποθέτουμε $f(x)$ αύξουσα και $g(x)$ ολοκληρώσιμη με σταθερό θετικό πρόσημο

$$F(z) = \int_a^b f(x)g(x) dx - f(a) \int_a^z g(x) dx - f(b) \int_z^b g(x) dx$$

$$F(a) = \int_a^b f(x)g(x) dx - f(b) \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - f(b))g(x) dx \leq 0$$

$$F(b) = \int_a^b f(x)g(x) dx - f(a) \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - f(a))g(x) dx \geq 0$$

επειδή $F(z)$ συνεχής $F(a)F(b) \leq 0 \rightsquigarrow \exists \xi : F(\xi) = 0$. □

Πρ. 20c': Δεύτερο Θεώρημα Μέσης Τιμής

Αν $f(x)$ μονότονη συνεχής **και** $\exists f'(x)$

και $g(x)$ συνεχής

↓

$$\exists \xi \in [a, b] \rightsquigarrow \int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx$$

Απόδειξη

Θεωρούμε $f'(x) \leq 0$.

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x) d\left(\int_a^x g(t) dt\right) =$$

$$= f(b) \left(\int_a^b g(t) dt\right) - \int_a^b f'(x) \left(\int_a^x g(t) dt\right) dx$$

$\left(\int_a^x g(t) dt\right)$ συνεχής

$f'(x)$ ολοκληρώσιμη και διατηρεί πρόσημο

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(b) \left(\int_a^b g(t) dt\right) - \left(\int_a^\xi g(t) dt\right) \left(\int_a^b f'(x) dx\right) =$$

$$= f(b) \left(\int_a^b g(t) dt\right) - \left(\int_a^\xi g(t) dt\right) (f(b) - f(a)) =$$

$$= f(b) \left(\int_a^b g(t) dt - \int_a^\xi g(t) dt\right) + f(a) \int_a^\xi g(t) dt =$$

$$= f(a) \int_a^\xi g(t) dt + f(b) \int_\xi^b g(t) dt$$

□