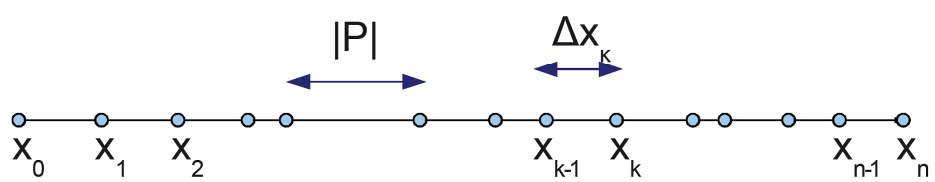
Διαμερίσεις

Ορισμός: Διαμέριση

Διαμέριση (Partition) ορισμένη στο διάστημα $I = [a, b]$

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \qquad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$



Ορισμός: λεπτότητα διαμέρισης

norm (λεπτότητα) διαμέρισης (Partition norm (mesh))

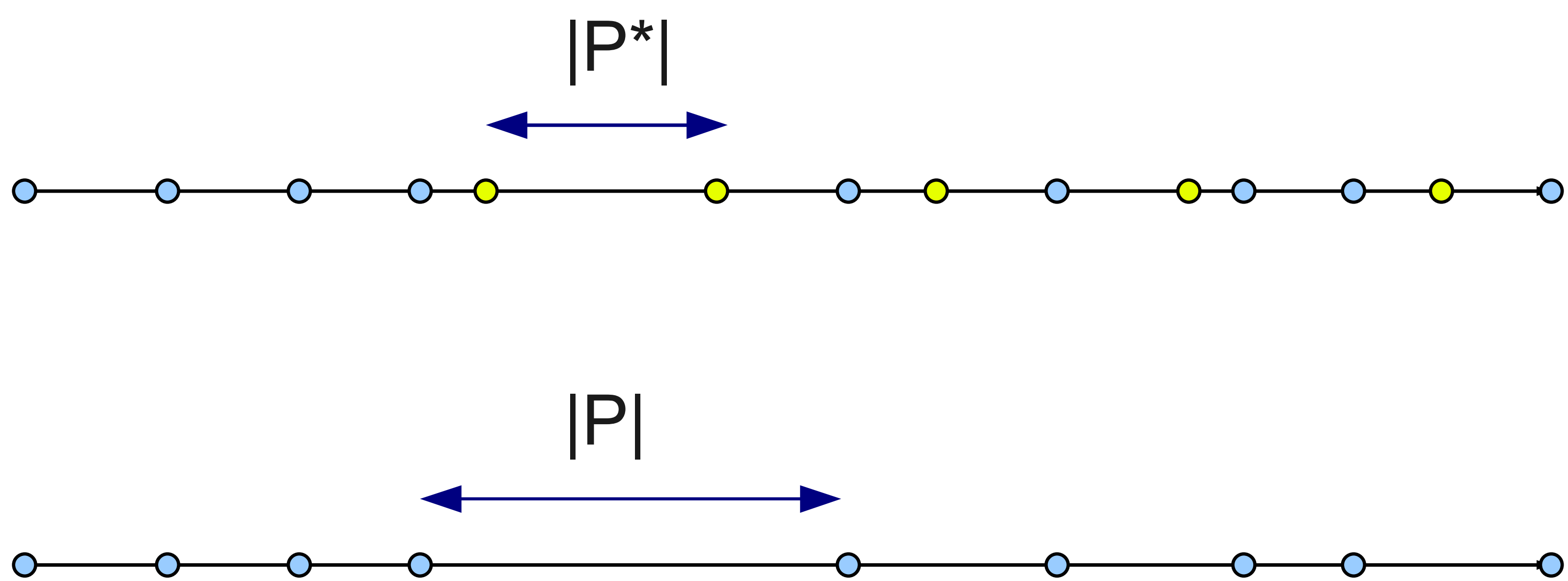
$$|P| = \max\{\triangle x_1, \triangle x_2, \ldots, \triangle x_n\}, \triangle x_k \equiv x_k - x_{k-1}$$

Ορισμός: μήκος διαμέρισης

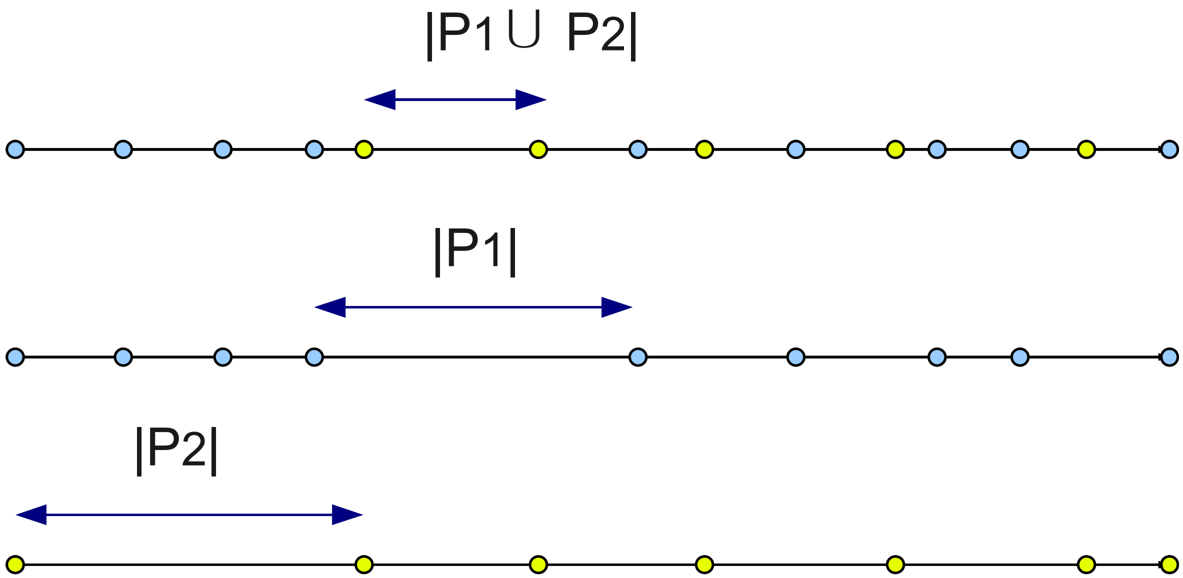
διάσταση (μήκος) διαμέρισης (Part. dimension (length))

$$d(P) = n \rightsquigarrow d(P)|P| \geq b - a$$

$$\{P^* \quad \text{λεπτότερη} \quad P\} \Leftrightarrow \{P^* \supset P\} \rightsquigarrow \{|P^*| \leq |P|, \quad d(P^*) > d(P)\}$$



- $|P_1 \bigcup P_2| \leq \min\left(|P_1|, |P_2|\right)$
- $d\left(P_1 \bigcup P_2\right) \leq d(P_1) + d(P_2)$



- $|P_1 \bigcap P_2| \geq \max\left(|P_1|, |P_2|\right)$
- $d\left(P_1 \bigcap P_2\right) \leq \min\left(d(P_1), d(P_2)\right)$

$f(x)$ φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{ή} \quad |f(x)| < B$$

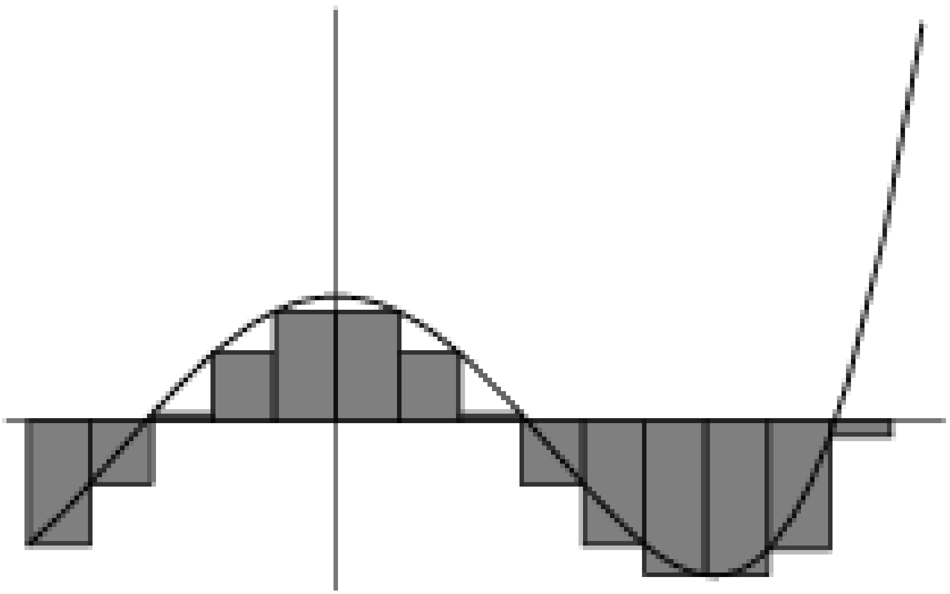
$$m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x), \quad M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$$

Ορισμός κάτω αθροίσματος

κάτω άθροισμα (low sum) της φραγμένης συνάρτησης πάνω σε μια διαμέριση P

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k$$

$$m_k = \inf \{f(x),\, x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

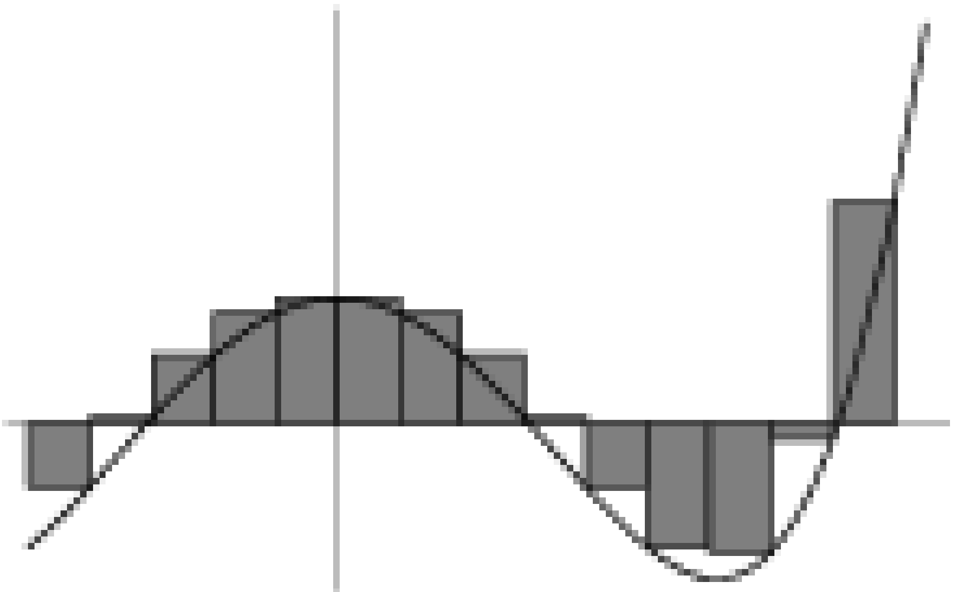


Ορισμός άνω αθροίσματος

$\boxed{\textit{άνω άθροισμα}}$ (upper sum) της φραγμένης συνάρτησης πάνω σε μια διαμέριση P

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k$$

$$M_k = \sup \{f(x),\, x_{k-1} \le x \le x_k\}$$



$f(x)$ φραγμένη συνάρτηση $f\,:\,[a,\,b]\,\to\,\mathbb{R}$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{ή} \quad |f(x)| < B$$

Πρ. 1

$L(P,f)\,\leq\,U(P,f)$

Πρ. 2

Λεπτότερη διαμέριση $\Rightarrow$ μεγαλύτερο κάτω άθροισμα

$$P^* \supset P \;\rightsquigarrow\; L(P,f)\,\leq\,L(P^*,f)$$

$$L(P^*,f) - L(P,f) \leq 2\,(d(P^*) - d(P))\;B\,|P|$$

Πρ. 3

Λεπτότερη διαμέριση $\Rightarrow$ μικρότερο άνω άθροισμα

$$P^* \supset P \;\rightsquigarrow\; U(P^*,f)\,\leq\,U(P,f)$$

$$U(P,f) - U(P^*,f) \leq 2\,(d(P^*) - d(P))\;B\,|P|$$

Πρ. 4

$L(P_1,f) \leq U(P_2,f)$

$f(x)$ φραγμένη συνάρτηση $f : [a,\ b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{ή} \quad |f(x)| < B$$

Πρ. 1

$L(P,f) \leq U(P,f)$

Απόδειξη.

Από τον ορισμό

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k$$

$$m_k = \inf\ \{f(x),\ x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

και

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k$$

$$M_k = \sup\ \{f(x),\ x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

έχουμε ότι: $m_k \leq M_k$ επομένως $L(P,f) \leq U(P,f)$ □

Πρ. 2

Λεπτότερη διαμέριση $\Rightarrow$ μεγαλύτερο κάτω άθροισμα

$$P^* \supset P \rightsquigarrow L(P,f) \leq L(P^*,f)$$

$$L(P^*,f) - L(P,f) \leq 2\,(d(P^*) - d(P))\; B\,|P|$$

Απόδειξη.

Εστω P_1 μια διαμέριση που προκύπτει από την P αν προσθέσουμε ένα νέο σημείο y, δηλ. $P_1 = P\bigcup\{y\}$

$$P = \{x_0,\, x_1,\, x_2, \ldots, x_{i-1},\, x_i,\, \ldots, x_n\} \quad d(P) = n$$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < \underbrace{x_{i-1} < y < x_i} < \ldots < x_n = b$$

$$P_1 = \{x_0,\, x_1,\, x_2, \ldots, x_{i-1},\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{νέο} \\ \text{στοιχ.}}}{y},\, x_i,\, \ldots, x_n\}$$

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{i-1} m_k \triangle x_k + \left(\inf_{x_{i-1}\leq x \leq x_i} f(x)\right)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{k=i+1}^{n} m_k \triangle x_k$$

$$\begin{aligned} L(P_1,f) = &\sum_{k=1}^{i-1} m_k \triangle x_k + \\ &+ \left(\inf_{x_{i-1}\leq x\leq y} f(x)\right)(y - x_{i-1}) + \left(\inf_{y\leq x\leq x_i} f(x)\right)(x_i - y) + \\ &+ \sum_{k=i+1}^{n} m_k \triangle x_k \end{aligned}$$

Επειδή $\inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) \leq \inf_{x_{i-1}\leq x\leq y} f(x)$ και $\inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) \leq \inf_{y\leq x\leq x_i} f(x)$ επομένως

$$\begin{aligned} &L(P_1,f) - L(P,f) = \\ &= \left(\inf_{x_{i-1}\leq x\leq y} f(x) - \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)\right)(y - x_{i-1}) + \\ &+ \left(\inf_{y\leq x\leq x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)\right)(x_i - y) \geq 0 \end{aligned}$$

Επειδή $|f(x)| < B$ τότε

$$\inf_{x_{i-1}\leq x\leq y} f(x) - \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) \leq |\inf_{x_{i-1}\leq x\leq y} f(x)| + |\inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)| < 2B$$

όμοια

$$\inf_{y\leq x\leq x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) < 2B$$

οπότε

$$L(P_1,f) - L(P,f) < 2B\,(x_i - x_{i-1}) = 2B|P|$$

οπότε επαναλαμβάνοντας το αποτέλεσμα για διαφορές στοιχείων περισσότερο από 1, έτσι αν P_2 προκύπτει από την διαμέριση P_1 με την προσθήκη ενός νέου στοιχείου, η P_3 προκύπτει από την διαμέριση P_2 με την προσθήκη ενός νέου στοιχείου κ.ο.κ. θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} L(P_1,f) - L(P,f) < 2B|P| \\ L(P_2,f) - L(P_1,f) < 2B|P_1| \leq 2B|P| \\ L(P_3,f) - L(P_3,f) < 2B|P_2| \leq 2B|P| \\ \quad \ldots \\ L(P_m,f) - L(P_{m-1},f) < 2B|P_{m-1}| \leq 2B|P| \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow\; L(P_m,f) - L(P_1,f) < 2mB|P|$$

αλλά $m = d(P_m) - d(P)$. Οπότε

$$L(P^*,f) - L(P,f) < 2B\,m\,|P| \quad m = d(P^*) - d(P)$$

□

Πρ. 3

Λεπτότερη διαμέριση $\Rightarrow$ μικρότερο άνω άθροισμα

$$P^* \supset P \ \rightsquigarrow \ U(P^*, f) \ \leq \ U(P, f)$$

$$U(P, f) - U(P^*, f) \leq 2\,(d(P^*) - d(P))\ B\,|P|$$

Η απόδειξη είναι ίδια όπως στην πρόταση 2.

Πρ. 4

$L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} L(P_1, f) \leq & \ \ L(P_1 \bigcup P_2, f) \leq U(P_1 \bigcup P_2, f) \leq \\ \leq & \ \ U(P_2, f) \end{aligned}$$

$\square$