

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Εστω $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα $I = [a, b]$ (ή $(a, b]$ ή $[a, b)$ ή (a, b))

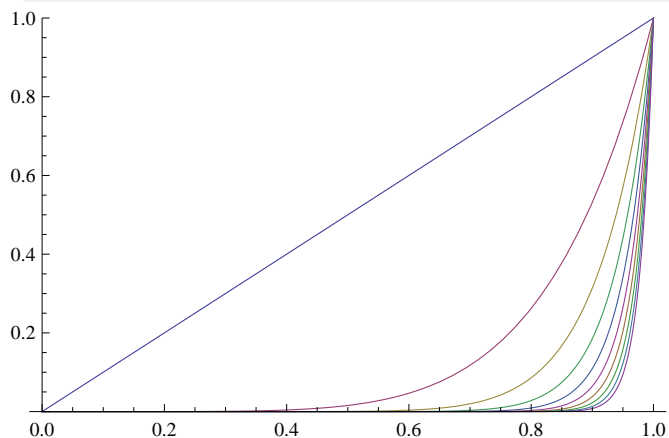
ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει σημειακά (point-wise convergence) στην συνάρτηση $f(x)$ αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \epsilon \exists N(\epsilon, x) : n > N(\epsilon, x) \rightsquigarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

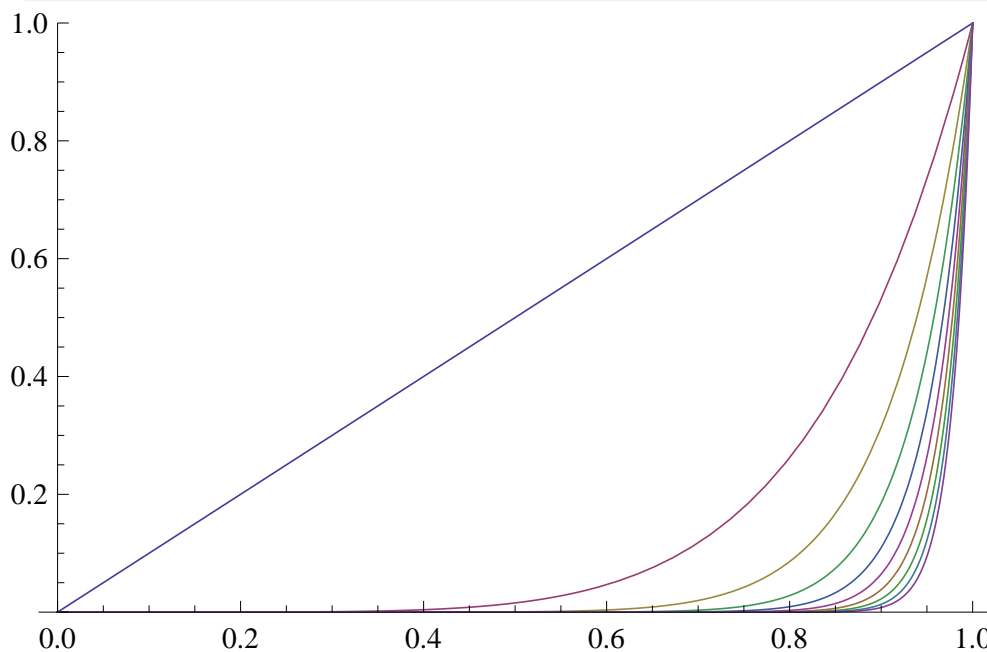
Παράδειγμα 1

$f_n(x) = x^n, |x| < 1$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$



Παράδειγμα 1

$$f_n(x) = x^n, |x| < 1 \text{ τότε } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$$



Παρατηρούμε ότι:

$$|x|^n < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < \frac{1}{|x|^n} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) < n \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) \Leftrightarrow N(\epsilon, x) = \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)} < n$$

Οπότε

$$\forall \epsilon \exists N(\epsilon, x) = \frac{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)} : n > N(\epsilon, x) \rightsquigarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Σημείωση: $\sup_{x \in I} N(\epsilon, x) = \infty$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα (uniform convergence) στην συνάρτηση $f(x)$ αν

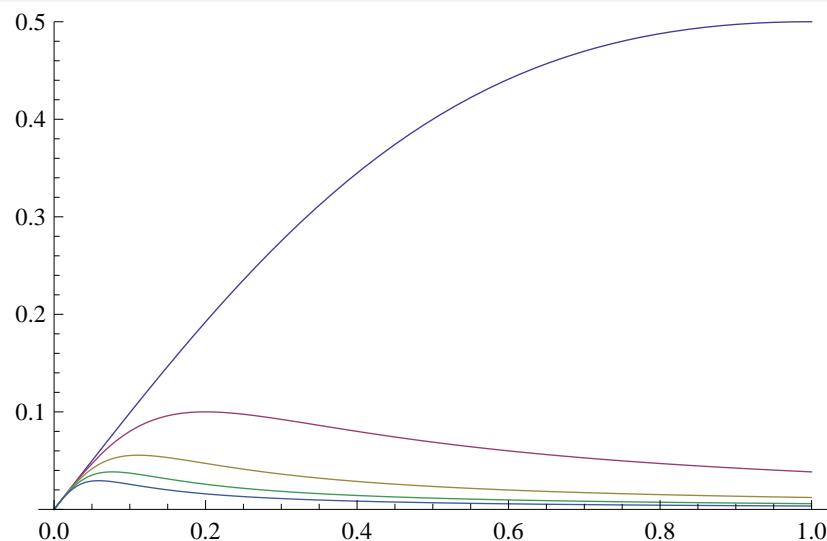
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$



$$\forall \epsilon \forall x \in I \exists N(\epsilon) : n > N(\epsilon) \rightsquigarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

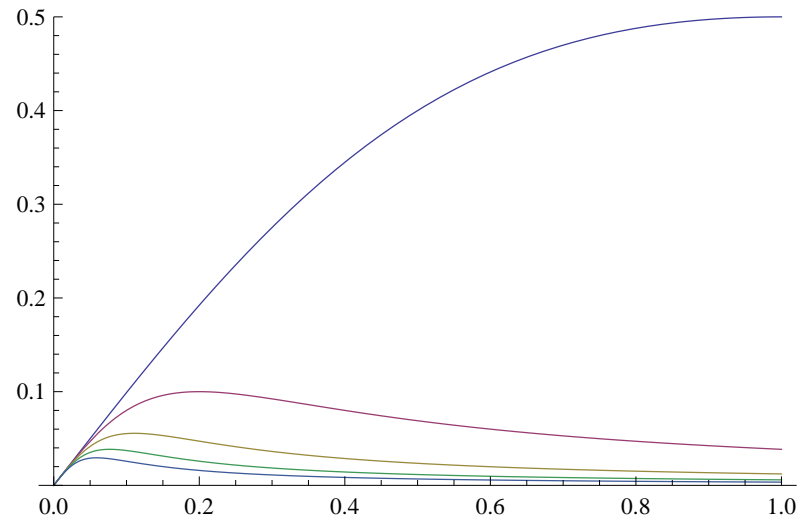
Παράδειγμα 2

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ τότε } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$$



Παράδειγμα 2

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{τότε} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$$



Παρατηρούμε ότι:

$$f'_n(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2} \rightsquigarrow f'_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \rightsquigarrow \max_{x \in I} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}$$

$$\rightsquigarrow N(\epsilon, x) = N(\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon}$$

$$\forall \epsilon \exists N(\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon} : n > N(\epsilon, x) \rightsquigarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x)$ ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x)$, η $f(x)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$. Τότε $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$.

Κριτήριο μή ομοιόμορφης σύγκλισης

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$ τότε

αν $f_n(x_n)$ **δεν** συγκλίνει \Rightarrow η ακολουθία $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ **δεν** συγκλίνει ομοιόμορφα

Παράδειγμα 3: Οι συναρτήσεις $f_n(x) = nx(1-x)^n$ ενώ συγκλίνουν σημειακά στο μηδέν για $x \in [0, 1]$. Για κάθε $x \in (0, 1)$ έχουμε

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{n+1}{n} (1-x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) (1-x)$$

Για μεγάλα n θα έχουμε:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) (1-x) < \left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

οπότε

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} < \left(1 - \frac{x}{2}\right) < 1$$

άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$ σε κάθε σημείο x . Αλλά η ακολουθία $f_n(x)$

δεν συγκλίνει ομοιόμορφα επειδή για $x_n = 1/n$ και για μεγάλα n

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} \rightsquigarrow f_n\left(\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{2e} \rightsquigarrow \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| > \frac{1}{2e}$$

Πρόταση 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$



$$M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Πρόταση 2 (Κριτήριο Cauchy)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$



$$\forall \epsilon \forall x \in I \exists N(\epsilon) : n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Πρόταση 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

$f_n(x)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχείς στο ανοικτό διάστημα (a, b)



$f(x)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχής στο ανοικτό διάστημα (a, b)

Αυτή η πρόταση σημαίνει ότι τα σύμβολα $\lim_{x \rightarrow x_0}$ και $\lim_{n \rightarrow \infty}$ εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλίνουν ομοιόμορφα:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)$$

Πρόταση 4:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

και $f_n(x)$ συνεχείς συναρτήσεις για $x \in [a, b]$



$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ ομοιόμορφα}$$

Η Πρόταση 4 σημαίνει ότι τα σύμβολα \lim και \int εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλίνουν ομοιόμορφα:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right) = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) dt$$

Πρόταση 5

$f_n(x)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο διάστημα (a, b)

$f_n(x)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x)$

$f'_n(x)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{df_n(x)}{dx} = f'(x) = \frac{d \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)}{dx}$$

Το παραπάνω συμπέρασμα σημαίνει ότι τα σύμβολα \lim και $\frac{d}{dx}$ εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλίνουν ομοιόμορφα.

Πρόταση 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$



$$M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Απόδειξη.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$



$$\forall \epsilon \forall x \in I \exists N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) : n > N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \rightsquigarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\rightsquigarrow M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$$

Το αντίστροφο αποδεικνύεται ως εξής:

$$M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



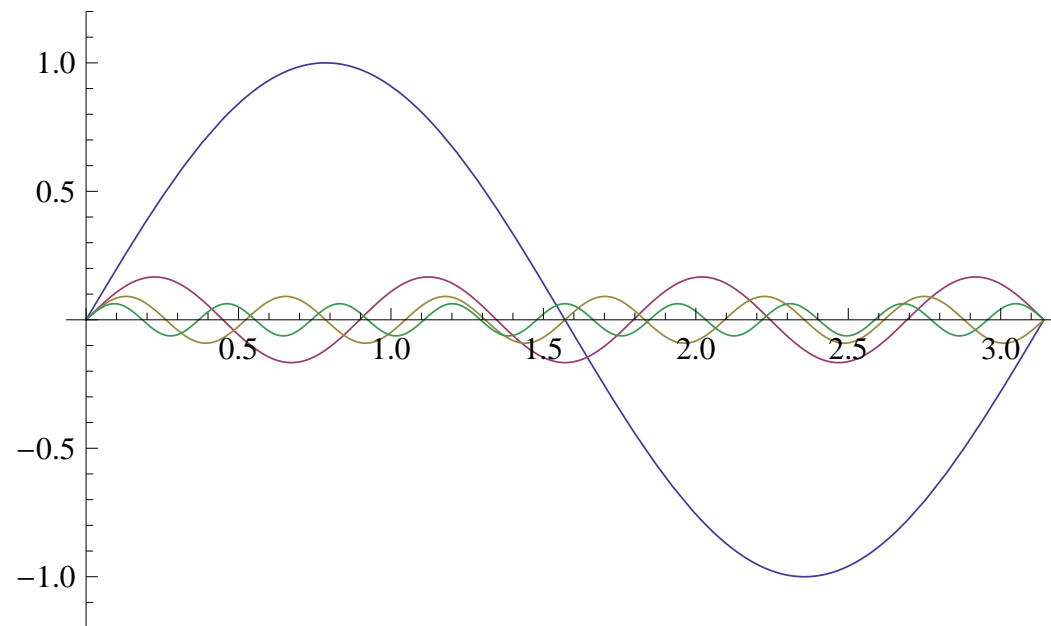
$$\forall \epsilon \exists N(\epsilon) : n > N(\epsilon) \rightsquigarrow M_n < \epsilon \rightsquigarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$



Παράδειγμα 4: Για κάθε x

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx + x)}{n} \rightsquigarrow |f_n(x)| \leq \frac{1}{n} = M_n$$
$$\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \text{ ομοιόμορφα}$$



Πρόταση 2 (Κριτήριο Cauchy)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$



$$\forall \epsilon \forall x \in I \exists N(\epsilon) : n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Απόδειξη.

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, ομοιόμορφα $\Rightarrow f_n(x)$ ικανοποιεί το Κριτήριο Cauchy

Εστω $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, ομοιόμορφα, αυτό σημαίνει ότι

$$\forall \epsilon \forall x \in I \exists N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) : n > N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \rightsquigarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$
$$\text{και } m > N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \rightsquigarrow |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

οπότε

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n(x) - f(x)) + (f(x) - f_m(x))| \leq$$
$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

επομένως

$$\forall \epsilon \forall x \in I \exists N(\epsilon) : n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Επομένως αποδείξαμε ομοιόμορφη σύγκλιση \Rightarrow Κριτήριο Cauchy.

Για το αντίστροφο έστω ότι ισχύει το παραπάνω, αυτό σημαίνει ότι για κάθε x σταθερό η ακολουθία $f_n(x)$ είναι μια ακολουθία Cauchy άρα συγκλίνει σε κάθε σημείο σε μια συνάρτηση $f(x)$, δηλαδή

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{m+k}(x) = f(x)$$

$$\forall \epsilon \forall x \in I \exists N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) : m > N\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \text{ και } k \geq 0 \rightsquigarrow |f_m(x) - f_{m+k}(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

άρα

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_{m+k}(x)| = |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

και η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα. \square

Πρόταση 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

$f_n(x)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχείς στο ανοικτό διάστημα (a, b)

⇓

$f(x)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχής στο ανοικτό διάστημα (a, b)

Απόδειξη.

◇ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, ομοιόμορφα \rightsquigarrow

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall h \quad \exists n_0 : |f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ και } |f_{n_0}(x+h) - f(x+h)| < \frac{\epsilon}{3}$$

◇ $f_{n_0}(x)$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχής στο ανοικτό διάστημα (a, b) \rightsquigarrow

$$\exists \delta(\epsilon) > 0 : |h| < \delta(\epsilon) \rightsquigarrow |f_{n_0}(x+h) - f_{n_0}(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Οπότε

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 : |h| < \delta(\epsilon) \rightsquigarrow$$

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |f(x+h) - f_{n_0}(x+h)| + |f_{n_0}(x+h) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| < \epsilon$$

Αρα η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο (a, b) □

Αυτή η πρόταση σημαίνει ότι τα σύμβολα $\lim_{x \rightarrow x_0}$ και $\lim_{n \rightarrow \infty}$ εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλίνουν ομοιόμορφα:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)$$

Πρόταση 4:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$

και $f_n(x)$ συνεχείς συναρτήσεις για $x \in [a, b]$



$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ ομοιόμορφα}$$

Απόδειξη.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα}$$



$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall t \in I \quad \exists N \left(\frac{\epsilon}{2(b-a)} \right) :$$

$$n > N \left(\frac{\epsilon}{2(b-a)} \right) \rightsquigarrow |f_n(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

Παράδειγμα 5: Για κάθε $x \in [0, 1]$ η ακολουθία $f_n(x) = nx e^{-nx^2}$ συγκλίνει σημειακά στο 0 αλλά **δεν** συγκλίνει ομοιόμορφα. Για μεγάλα n και $x \in (0, 1)$

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-x^2} < e^{x^2/2} e^{-x^2} = e^{-x^2/2} < 1 \rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \text{ σημειο}$$

Αλλά

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{\frac{n}{2e}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

\rightsquigarrow η ακολουθία **δεν** συγκλίνει ομοιόμορφα. Παρατηρούμε ότι:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 nx e^{-nx^2} dx = \frac{1 - e^{-n}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

Αλλά

$$\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right) dx = 0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f_n(x) dx\right) = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 6: Αν $f_n(x) = \frac{n + \sin x}{3n + \cos^2 x}$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1$$

Αποδ. Η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\frac{1}{3}$ διότι (Πρόταση 1):

$$\left| \frac{n + \sin x}{3n + \cos^2 x} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3 \sin x - \cos^2 x}{9n + 3 \cos^2 x} \right| \leq \frac{4}{9n} \rightarrow 0$$

επομένως από την πρόταση 4 έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1$$

Πρόταση 5

$f_n(x)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο διάστημα (a, b)

$f_n(x)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x)$

$f'_n(x)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα

⇓

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{df_n(x)}{dx} = f'(x) = \frac{d \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)}{dx}$$

Απόδειξη.

$f'_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα \Leftrightarrow υπάρχει συνάρτηση $\phi(x)$ τέτοια ώστε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \phi(x)$$

Από την Πρόταση 4, έχουμε ότι:

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \rightarrow \int_{x_0}^x \phi(t) dt \quad \text{ομοιόμορφα}$$

δηλαδή

$$\forall \epsilon \forall x \in I \exists N_1(\epsilon) : n > N_1(\epsilon) \rightsquigarrow \left| f_n(x) - f_n(x_0) - \int_{x_0}^x \phi(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Επειδή η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x)$

$$\forall \epsilon \exists N_2(\epsilon) : n > N_2(\epsilon) \rightsquigarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{και} \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{4}$$

Οπότε για ένα $n > \max\{N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)\}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - f(x_0) - \int_{x_0}^x \phi(t) dt \right| = \\ & = \left| f(x) - f_n(x) - (f(x_0) - f_n(x_0)) + f_n(x) - f_n(x_0) - \int_{x_0}^x \phi(t) dt \right| \leq \\ & \leq |f(x) - f_n(x)| + |f(x_0) - f_n(x_0)| + \left| f_n(x) - f_n(x_0) - \int_{x_0}^x \phi(t) dt \right| < \epsilon \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\left\{ \forall \epsilon > 0 \rightsquigarrow \left| f(x) - f(x_0) - \int_{x_0}^x \phi(t) dt \right| < \epsilon \right\} \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x \phi(t) dt$$

⇓

$$f'(x) = \phi(x) \rightsquigarrow \frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{df_n(x)}{dx} \right)$$

□

Το παραπάνω συμπέρασμα σημαίνει ότι τα σύμβολα \lim και $\frac{d}{dx}$ εναλλάσσονται για συνεχείς συναρτήσεις, που συγκλίνουν ομοιόμορφα.