# ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ $\boxed{\text{ΤΜΗΜΑ Β}}$

*7 Ιουν. 2010*

**ΘΕΜΑ 1$^o$** (1.5 β.)

i Δώστε τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης μιας ακολουθίας συναρτήσεων.

**ΛΥΣΗ**: δες ορισμό στην θεωρία.

ii Αποδείξτε ότι αν η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη για $x$ σε ένα διάστημα $I = [a,b]$, τότε $M_n = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ και αντίστροφα.

**ΛΥΣΗ**: Δες απόδειξη από την θεωρία.

**ΘΕΜΑ 2$^o$** (1.5)

Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^3}{(n^2+k^2)^2}$$

**ΛΥΣΗ**: Εφαρμόζουμε το θεώρημα Darboux για την διαμέριση:

$$P_n = \left\{ x_k = \frac{k}{n},\ k = 0,1,\dots n \right\} \Rightarrow \Delta x_k = \frac{1}{n}$$

και την επιλογή

$$T_n = \left\{ \xi_k = \frac{k}{n},\ \ k = 1,\dots n \right\}$$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^3}{(n^2+k^2)^2} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$$

Για να λύσουμε το ολοκλήρωμα κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $x = \tan t$, $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$.

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)^2} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt = \frac{2+\pi}{8}$$

**ΘΕΜΑ 3$^o$** (2 β.) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

**(α):** $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x} \cos\beta x\, dx, \qquad \alpha > 0$

**ΛΥΣΗ**: Μπορούμε να το λύσουμε με την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών (ή με επανάληψη δύο φορές ολοκλήρωσης κατά παράγοντες )

$$\int \mathrm{e}^{-\alpha x} \cos\beta x\, dx = A\mathrm{e}^{-\alpha x}\cos\beta x \,+\, B\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{-\alpha x}\cos\beta x \,=\, \frac{d}{dx}\left(A\mathrm{e}^{-\alpha x}\cos\beta x \,+\, B\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x\right)$$

$$\int \mathrm{e}^{-\alpha x}\cos\beta x\, dx = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}(\beta\sin(bx) - \alpha\cos(bx))}{\alpha^2+\beta^2} \;\Rightarrow\; \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\cos\beta x\, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

**(β):** $\int \dfrac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\sqrt{9x^2-6x+5}}\,dx$

**ΛΥΣΗ**:

$$\int \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\sqrt{9x^2-6x+5}}\,dx = \int \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\sqrt{9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+4}}\,dx \underbrace{=}_{x-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\sinh\, t} \int \frac{\frac{4}{9}\sinh^2 t}{3\cosh\, t}\cosh\, t\, dt = \frac{4}{27}\left(\frac{1}{4}\sinh(2t)-\frac{t}{2}\right)$$

**(γ):** $\int \dfrac{1}{\sin^3\, x}\,dx$

**ΛΥΣΗ**: Πρόκειται για ολοκλήρωμα της μορφής $\int R(\sin\, x,\ \cos\, x)\,dx$ οπότε για να το λύσουμε χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $t=\tan\,\frac{x}{2}$ οπότε έχουμε

$$\sin\, x = \frac{2t}{1+t^2},\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \Rightarrow \int \frac{1}{\sin^3\, x}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3}\frac{2dt}{1+t^2} = \frac{1}{4}\int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^3}\,dt$$

**(δ):** $\int \ln\left(1+x^2\right)\,dx$

**ΛΥΣΗ**:

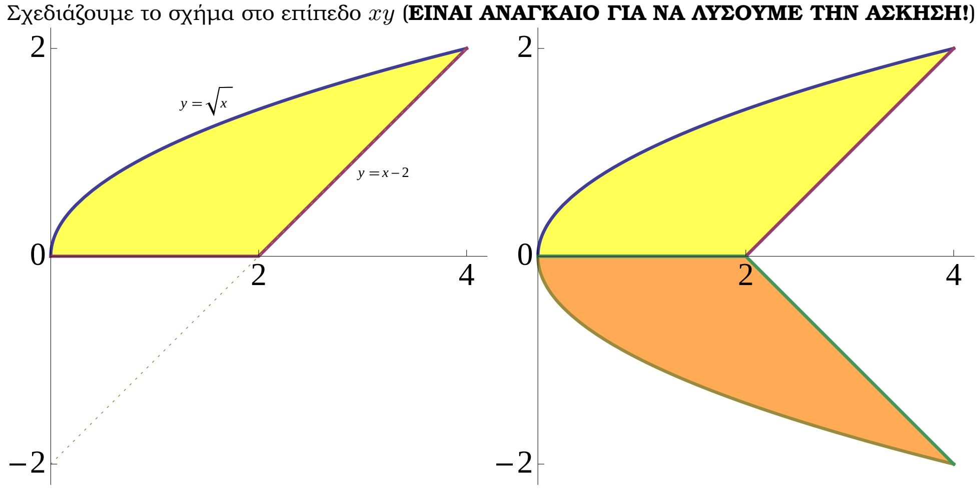
Για να το λύσουμε κάνουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int \ln\left(1+x^2\right)\,dx = x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = x\ln\left(1+x^2\right) - 2\int dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

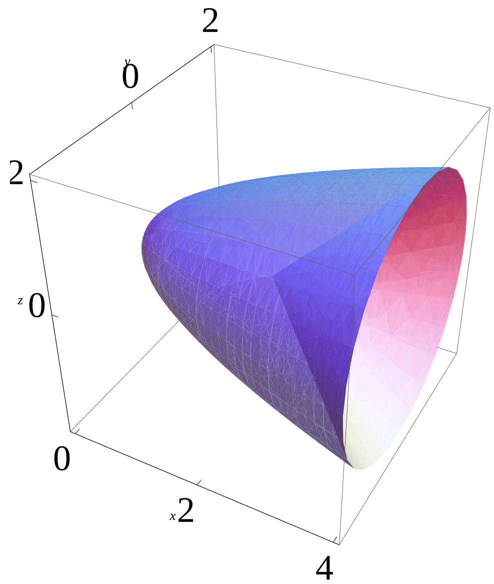
**ΘΕΜΑ 4$^o$** $(1.5$ β.$)$ Να υπολογισθεί ο όγκος και η επιφάνεια του στερεού που προκύπτει απο την περιστροφή γύρω από τον άξονα $0x$ του σχήματος, το οποίο περιέχεται μεταξύ της καμπύλης $y=\sqrt{x}$ και της καμπύλης $y=x-2$ και του άξονα $Ox$, γιά $x\geq 0$.

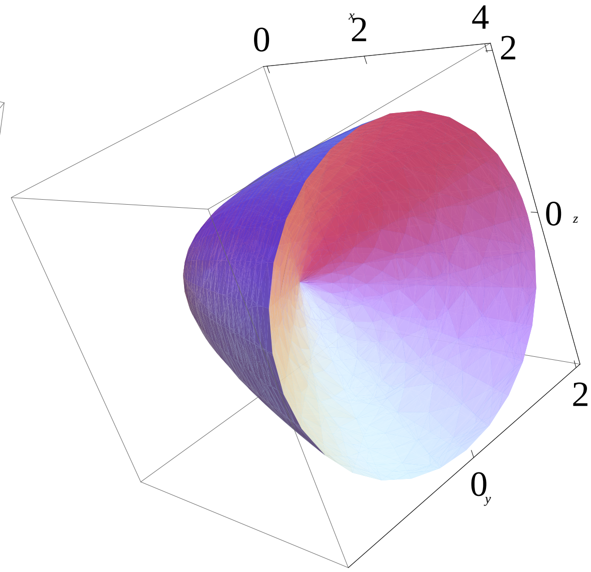
**ΛΥΣΗ**:

Σχεδιάζουμε το σχήμα στο επίπεδο $xy$ (**ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΟ ΓΙΑ ΝΑ ΛΥΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΣΚΗΣΗ!**)




Το στερεό σχήμα που δημιουργείται από την περιστροφή αυτού του σχήματος γύρω από τον άξονα $Ox$ είναι το παρακάτω




Ο όγκος του σχήματος περιστροφής είναι $\mathbf{V} = \mathbf{V_1} - \mathbf{V_2}$ όπου $V_1$ είναι ο όγκος από την περιστροφή της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ για $0 \leq x \leq 4$

$$V_1 = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx = 8\pi$$

και $V_2$ είναι ο όγκος από την περιστροφή της καμπύλης $y = x - 2$ για $2 \leq x \leq 4$

$$V_2 = \pi \int_2^4 (x-2)^2 \, dx = \frac{2^3}{3}\pi$$

$$V = 8\pi - \frac{2^3}{3}\pi$$

Η επιφάνεια του στερεού είναι $\mathbf{S} = \mathbf{S_1} + \mathbf{S_2}$ όπου $S_1$ είναι η επιφάνεια από την περιστροφή της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ για $0 \leq x \leq 4$

$$S_1 = 2\pi \int_0^4 y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} \, dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x + \frac{1}{4}} \, dx = 2\pi \left. \frac{\left(x + \frac{1}{4}\right)^{3/2}}{3/2} \right|_0^4$$

και $S_2$ είναι η επιφάνεια από την περιστροφή της καμπύλης $y = x - 2$ για $2 \leq x \leq 4$

$$S_2 = 2\pi \int_2^4 y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx = 2\pi \int_2^4 (x-2)\sqrt{1 + (1)^2} \, dx = 2\sqrt{2}\pi \frac{2^2}{2}$$

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi \frac{\left(4 + \frac{1}{4}\right)^{3/2}}{3/2} - 2\pi \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{3/2}}{3/2} + 4\sqrt{2}\pi$$

**ΘΕΜΑ 5$^o$** (1.5 β.) Για ποιές τιμές του $a$ υπάρχουν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$(i) I = \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^a}\,dx \quad \text{και} \quad (ii) I = \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^a}\,dx,$$

**ΛΥΣΗ**:

(i) Γιά $0 < x < 1$ έχουμε $\sin x < x \Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin^4 x}{x^a}\,dx < \int_0^1 \frac{x^4}{x^a}\,dx = \left.\frac{x^{5-a}}{5-a}\right|_0^1 \Rightarrow \boxed{5-a>0}$

Γιά $1 < x < \infty$ έχουμε $|\sin x| \le 1 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin^4 x}{x^a}\,dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx = \left.\frac{x^{1-a}}{1-a}\right|_1^\infty \Rightarrow \boxed{1-a<0}$

άρα $\boxed{\boxed{1 < a < 5}}$

(ii) Γιά $0 < x < 1$ έχουμε $\frac{x^2}{1+x^a} < x^2 \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^a}\,dx < \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

Γιά $1 < x < \infty$ έχουμε $\frac{x^2}{1+x^a} < \frac{x^2}{x^a} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{x^2}{1+x^a}\,dx < \int_1^\infty \frac{x^2}{x^a}\,dx = \left.\frac{x^{3-a}}{3-a}\right|_1^\infty \Rightarrow \boxed{3-a<0}$

άρα $\boxed{\boxed{3 < a}}$

**ΘΕΜΑ 6$^o$** (2 β.)

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 |x-t|\,|t|\,dt$.

**ΛΥΣΗ**:

- Γιά $\boxed{x < -1}$

$$I = \int_{-1}^0 |x-t|\,|t|\,dt + \int_0^1 |x-t|\,|t|\,dt = -\int_{-1}^0 |x-t|\,t\,dt + \int_0^1 |x-t|\,t\,dt$$

$$I = -\int_{-1}^0 (t-x)\,t\,dt + \int_0^1 (t-x)\,t\,dt = (-\frac{x}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{x}{2})$$

- Γιά $\boxed{-1 < x < 0}$

$$I = \int_{-1}^x |x-t|\,|t|\,dt + \int_x^0 |x-t|\,|t|\,dt + \int_0^1 |x-t|\,|t|\,dt = -\int_{-1}^x |x-t|\,t\,dt - \int_x^0 |x-t|\,t\,dt + \int_0^1 |x-t|\,t\,dt$$

$$I = -\int_{-1}^x (x-t)\,t\,dt - \int_x^0 (t-x)\,t\,dt + \int_0^1 (t-x)\,t\,dt = (-\frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}) + (-\frac{x^3}{6}) + (\frac{1}{3} - \frac{x}{2})$$

- Γιά $\boxed{0 < x < 1}$

$$I = \int_{-1}^0 |x-t|\,|t|\,dt + \int_0^x |x-t|\,|t|\,dt + \int_x^1 |x-t|\,|t|\,dt = -\int_{-1}^0 |x-t|\,t\,dt + \int_0^x |x-t|\,t\,dt + \int_x^1 |x-t|\,t\,dt$$

$$I = -\int_{-1}^{0} (x-t)\,t\,dt + \int_{0}^{x} (x-t)\,t\,dt + \int_{x}^{1} (t-x)\,t\,dt = (\frac{x}{2}+\frac{1}{3}) + (\frac{x^3}{6}) + (\frac{x^3}{6}-\frac{x}{2}+\frac{1}{3})$$

- Για $\boxed{x > 1}$

$$I = \int_{-1}^{0} |x-t|\ |t|\ dt + \int_{0}^{1} |x-t|\ |t|\ dt = -\int_{-1}^{0} |x-t|\,t\,dt + \int_{0}^{1} |x-t|\,t\,dt$$

$$I = -\int_{-1}^{0} (x-t)\,t\,dt + \int_{0}^{1} (x-t)\,t\,dt = (\frac{x}{2}+\frac{1}{3}) + (\frac{x}{2}-\frac{1}{3})$$