

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ / ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΤΜΗΜΑ α

9 Οκτωβρίου 2006

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>** (1.5+1 β.)

- (i) Η συνάρτηση  $f(x)$  είναι μια γνήσια αύξουσα συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα  $[0, a]$  με τις ιδιότητες  $f(0) = 0$  και  $f(a) = A > 0$ . Αποδείξτε ότι:

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^A f^{-1}(u) du = aA$$

- (ii) Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$  να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα  $\int_0^{g(1/\sqrt{3})} g^{-1}(t) dt$

(Shm:  $f^{-1}(u)$  enai h ant-strofh sun rthsh thc  $f(x)$ )

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>** (1+1 β.)

(α'): Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + \ln(2 - \frac{k}{n})) (2n - k)} = \ln(1 + \ln 2)$$

(β'): Να μελετηθεί η πρώτη παράγωγος  $f'(x)$  και η δεύτερη παράγωγος  $f''(x)$  όπου

$$f(x) = \int_0^1 |t - x| t^3 dt \text{ για } x \in \mathbb{R}$$

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>** (2.5 β.) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

(α)  $\int \frac{dx}{1 + \tanh x} = \frac{x}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}$

(β)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} = 6\sqrt[6]{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 2\sqrt{x+1} - 6 \ln(1 + \sqrt[6]{x+1})$

(γ)  $\int_1^2 \frac{dx}{1 + 2\sqrt{(x-1)(2-x)}} = \frac{\pi}{2} - 1$

(δ)  $\int \left( \frac{\sinh 3x}{\sinh x} \right)^2 dx = 3x + 2 \sinh(2x) + \frac{\sinh(4x)}{2}$

(ε)  $\int_0^{1/2} x^2 \sin(\pi x) dx = \frac{1}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^3}$

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>** (2 β.) Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται μεταξύ της καρδιοειδούς  $r = 1 + \cos \theta$  και του κύκλου  $r = \sin \theta$  για  $\pi \geq \theta \geq 0$ .

(Shm: Gia na to l0sete eukol itera, sqedi ste tic kamp0lec.)

**ΘΕΜΑ 5<sup>ο</sup>** (1 β.) Για ποιές τιμές του  $a$  υπάρχει το ολοκλήρωμα:  $\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2} dx$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!